

مهارات التفكير العليا

مشتقة اقترانات خاصة

(25) تبرير: إذا كان الاقتران $y = e^x - ax$ ، حيث a عدد حقيقي، فأجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y ، مبررًا إيجابتي.

$$y = e^x - ax$$

$$x = 0 \Rightarrow y = e^0 - a(0) = 1$$

لنقطة تقاطع منحنى الاقتران مع المحور هي: $(0, 1)$

$$dydx = e^x - a$$

ميل المماس عند هذه النقطة هو:

$$dydx|_{x=0} = e^0 - a = 1 - a$$

معادلة المماس هي:

$$y - 1 = (1 - a)(x - 0) \Rightarrow y = (1 - a)x + 1$$

(26) تحد: أثبت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران: $y = 2e^x + 3x + 5x^3$.

$$y' = 2e^x + 3 + 15x^2$$

$$2e^x > 0 \text{ لكل } x$$

$$15x^2 \geq 0 \text{ لكل } x$$

$$2e^x + 15x^2 > 0 \text{ لكل } x \text{ وبالجمع نجد أنه لكل } x$$

$$\text{وبإضافة 3 للطرفين: لكل } x \text{ فإن } 2e^x + 15x^2 + 3 > 3 \text{ أي أن } y' > 3$$

لذا لا يمكن أن تكون قيمة تساوي 2 لأي قيمة حقيقية للمتغير x .

تبرير: إذا كان الاقتران: $y = ke^x$ ، حيث: $k > 0$ ، وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة P ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(27) أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور x .

x الإحداثي لنقطة تقاطع المنحنى $y = ke^x$ مع المحور y هو 0 .

$y = ke^0 = k$ وبالتعويض في معادلة الاقتران نجد أن ، أي أن إحداثي P هما $(0, k)$.

$$dydx = kex \Rightarrow dydxx = 0 = ke0 = k$$

معادلة المماس هي:

$$y - k = k(x - 0) \Rightarrow y = kx + k$$

x ولأيجاد نقطة تقاطعه مع المحور نعوض $y = 0$

$$0 = kx + k \Rightarrow x = -1$$

P إذن، نقطة تقاطع المماس عند مع المحور x هي: $(-1, 0)$.

(28) إذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة $(100, 0)$ ، فأجد قيمة k .

P ميل العمودي على المماس عند النقطة هو $-1/k$

معادلة العمودي على المماس هي:

$$y - k = -1k(x - 0) \Rightarrow y = -1kx + k$$

وبتعويض إحداثي نقطة التقاطع نجد أن:

$$0 = -1k(100) + k \Rightarrow k^2 = 100 \Rightarrow k = \pm 10$$

$k = 10$ فإن ، $k > 0$: ولأن

تحد: إذا كان الاقتران $y = \log x$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(29) أثبت أن $dydx = 1/x \ln 10$

$$y = \log x = \log_{10} x = \ln x \ln 10 = 1 \ln 10 \ln x$$

$$dydx = 1 \ln 10 \times 1/x = 1/x \ln 10$$

(30) معتمداً على النتيجة من السؤال السابق، أجد dy/dx للاقتران: $y = \log ax^2$ ، حيث a عدد حقيقي موجب.

$$y = \log ax^2 = \log a + 2 \log x$$

$$dy/dx = 0 + 2 \times 1 \times \ln 10 = 2x \ln 10$$

تبرير: يُمثل الاقتران: $s(t) = 4 - \sin t$ ، $t > 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:
 (31) أجد سرعة الجسيم وتسارعه بعد 1 ثانية.

$$s(t) = 4 - \sin t$$

$$v(t) = -\cos t$$

$$a(t) = \sin t$$

(32) أجد موقع الجسيم عندما كان في حالة سكون لحظي أول مرة بعد انطلاقه.

$$v(t) = -\cos t = 0 \Rightarrow t = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$$

$t = \pi/2$ يكون الجسيم في حالة سكون لحظي لأول مرة بعد انطلاقه عندما $\pi/2$
 $s(\pi/2)$ ويكون موقعه عندها هو

$$s(\pi/2) = 4 - \sin(\pi/2) = 4 - 1 = 3\text{m}$$

(33) أجد موقع الجسيم عندما يكون تسارعه صفراً، مبرراً إجابتي.

$$a(t) = v'(t) = \sin t \Rightarrow a(t) = 0 \Rightarrow \sin t = 0$$

وبتعويض هذه النتيجة في اقتران الموقع نجد أن:

$$s(t) = 4 - \sin t = 4 - 0 = 4$$

$s = 4\text{ m}$ أي أن الجسيم يكون عند $s = 4\text{ m}$ عندما تسارعه صفراً.