مهارات التفكير العليا

مشتقة اقترانات خاصة

(25) تبرير: إذا كان الاقتران : $y = e^x - ax$، حيث a عدد حقيقي، فأجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y، مبررًا إجابتي.

$y = e^x - ax$

$x = 0 \Rightarrow y = e^0 - a(0) = 1$

نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع المحور y هي: $(0, 1)$

dydx= ex - a

ميل المماس عند هذه النقطة هو:

dydxx=0 = $e^0 - a = 1 - a$

معادلة المماس هي:

$y - 1 = (1 - a)(x - 0) \Rightarrow y = (1 - a)x + 1$

(26) تحدٍ: أثبت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران: $y = 2e^x + 3x + 5x^3$.

ميل مماس المنحنى عند نقطة عليه هو $y' = 2e^x + 3 + 15x^2$

لكل x فإن $2e^x > 0$

ولكل x فإن $15x^2 \geq 0$

وبالجمع نجد أنه لكل x فإن $2e^x + 15x^2 > 0$

وبإضافة 3 للطرفين: لكل x فإن $2e^x + 15x^2 + 3 > 3$ أي أن $y' > 3$

إذن لا يمكن أن تكون قيمة y' تساوي 2 لأي قيمة حقيقية للمتغير x .

تبرير: إذا كان الاقتران: $y = ke^x$، حيث: $k > 0$، وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة P، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(27) أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور x.

الإحداثي x لنقطة تقاطع المنحنى $y = ke^x$ مع المحور y هو 0 .

وبالتعويض في معادلة الاقتران نجد أن $y = ke^0 = k$ ، أي أن إحداثيي P هما $(0, k)$.

dydx=kex⇒dydxx=0=ke0=k

معادلة المماس هي:

$y - k = k(x - 0) \Rightarrow y = kx + k$

ولأيجاد نقطة تقاطعه مع المحور x نعوض $y = 0$

$0 = kx + k \Rightarrow x = -1$

إذن، نقطة تقاطع المماس عند P مع المحور x هي: $(-1, 0)$.

(28) إذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة (100, 0)، فأجد قيمة k .

ميل العمودي على المماس عند النقطة P هو -1k

معادلة العمودي على المماس هي:

$y - k =$ -1k$(x - 0) \Rightarrow y =$ -1k$x + k$

وبتعويض إحداثيي نقطة التقاطع نجد أن:

$0 =$ -1k$(100) + k \Rightarrow k^2 = 100 \Rightarrow k = \pm 10$

ولأن: $k > 0$ ، فإن $k = 10$

تحدٍ: إذا كان الاقتران $y = \log x$، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

(29) أثبت أن dydx= 1x ln 10

$y = \log x = \log_{10} x =$ ln xln 10 = 1ln 10ln$x$

dydx=1ln10×1x=1xln10

(30) معتمداً على النتيجة من السؤال السابق، أجد dydx للاقتران: $y = \log ax^2$، حيث a عدد حقيقي موجب.

$y = \log ax^2 = \log a = \log a + 2\log x$

dydx=0+2×1xln10=2xln10

تبرير: يُمثل الاقتران: $s(t) = 4 - \sin t$, $t > 0$ موقع جُسيم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

(31) أجد سرعة الجُسيم وتسارعه بعد 1 ثانية.

$s(t) = 4 - \sin t$

$v(t) = - \cos t$

$a(t) = \sin t$

(32) أجد موقع الجُسيم عندما كان في حالة سكون لحظي أول مرة بعد انطلاقه.

v(t)=−cost=0⇒t=π2,3π2,5π2,...

يكون الجسيم في حالة سكون لحظي لأول مرة بعد انطلاقه عندما $t =$ π2

ويكون موقعه عندها هو $s($π2$)$

sπ2=4−sinπ2=4−1=3m

(33) أجد موقع الجُسيم عندما يكون تسارعه صفرًا، مبررًا إجابتي.

$a(t) = v'(t) = \sin t \Rightarrow a(t) = 0 \Rightarrow \sin t = 0$

وبتعويض هذه النتيجة في اقتران الموقع نجد أن:

$s(t) = 4 - \sin t = 4 - 0 = 4$

أي أن الجسيم يكون عند $s = 4$ m عندما تسارعه صفراً.