أتحقق من فهمي

تكامل اقترانات خاصة

تكامل الاقترانات الأسيّة

أتحقق من فهمي صفحة 10

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(a) $\int(5x2-3e7x)\,dx$

$\int(5x2-3e7x)\,dx=53x3-37e7x+C$

(b) $\int 0\ln 38e4x\,dx$

$\int 0\ln 38e4x\,dx=84e4x|0\ln 3=2(e4\ln 3-e0)=2(e\ln 34-e0)=2(81-1)=160$

(c) $\int e1-x\,dx$

$\int e1-x\,dx=\int(e1-x)1/2\,dx=\int e(1-x)/2\,dx=-2e(1-x)/2+C$

(d) $\int(3x+2x)\,dx$

$\int(3x+2x)\,dx=3x\ln 3+2(23x32)+C=3x\ln 3+43x32+C$

تكامل الاقترانات المثلثية

أتحقق من فهمي صفحة 12

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(a) $\int\cos(3x-\pi)\,dx$

$\int\cos(3x-\pi)\,dx=13\sin(3x-\pi)+C$

(b) $\int(\csc 2(5x)+e2x)\,dx$

$\int(\csc 2(5x)+e2x)\,dx=-15\cot 5x+12e2x+C$

(c) $\int 0\pi/3(\sin 2x-\cos 4x)\,dx$

$\int 0\pi 3(\sin 2x-\cos 4x)\,dx=(-12\cos 2x-14\sin 4x)|0\pi 3=(-12\cos 2\pi 3-14\sin 4\pi 3)-(-12\cos 0-14\sin 0)=(-12(-12)-14(-32))-(-12-0)=6+38$

المتطابقات المثلثية والتكامل

أتحقق من فهمي صفحة 14

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(a) $\int\cos 4\ x\,dx$

$\int\cos 4\ x\,dx\cos 4\ x=(\cos 2\ x)2=(1+\cos 2x2)2=14(1+2\cos 2x+\cos 2\ 2\ x)=14(1+2\cos 2x+1+\cos 4x2)=14+12\cos 2x+18+18\cos 4x=38+12\cos 2x+18\cos 4x\int\cos 4\ x\,dx=\int(38+12\cos 2x+18\cos 4x)dx=38x+14\sin 2x+132\sin 4x+C$

(b) $\int 0\pi/6\sin 3x\sin x\,dx$

$\int 0\pi 6\sin 3x\sin x\,dx=\int 0\pi 612(\cos(3x-x)-\cos(3x+x))\,dx=12\int 0\pi 6(\cos 2x-\cos 4x)\,dx=(14\sin 2x-18\sin 4x)|0\pi 6=(14\sin 2\pi 6-18\sin 4\pi 6)-(0-0)=38-316=316$

(c) $\int dx1+\cos x$

$\int dx1+\cos x=\int(11+\cos x\times 1-\cos x1-\cos x)dx=\int 1-\cos x\sin 2\ x\,dx=\int(\csc 2\ x-\cot x\csc x)\,dx=-\cot x+\csc x+C$

تكاملات ينتج منها اقتران لوغاريتمي طبيعي

أتحقق من فهمي صفحة 16

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(a) $\int(\sin x-5x)\,dx$

$\int(\sin x-5x)\,dx=-\cos x-5\ln|x|+C$

(b) $\int53x+2\,dx$

$\int53x+2\,dx=53\int33x+2\,dx=53\ln|3x+2|+C$

(c) $\int x2-7x+2x2\,dx$

$\int x2-7x+2x2\,dx=\int(1-7x+2x-2)\,dx=x-7\ln|x|-2x-1+C$

(d) $\int2x+3x2+3x\,dx$

$\int2x+3x2+3x\,dx=\ln|x2+3x|+C$

(e) $\int\sin 2x1+\cos 2x\,dx$

$\int\sin 2x1+\cos 2x\,dx=-12\int-2\sin 2x1+\cos 2x\,dx=-12\ln|1+\cos 2x|+C=-12\ln(1+\cos 2x)+C$

(f) $\int\cot x\,dx$

$\int\cot x\,dx=\int\cos x\sin x\,dx=\ln|\sin x|+C$

(g) $\int exex+7\,dx$

$\int exex+7\,dx=\ln|ex+7|+C=\ln(ex+7)+C$

(h) $\int\csc x\,dx$

$\int dx1+\cos x=\int(11+\cos x\times1-\cos x1-\cos x)dx=\int1-\cos x\sin2 x\,dx=\int(\csc2 x-\cot x\csc x)\,dx=-\cot x+\csc x+C$

أتحقق من فهمي صفحة 17

أجد: $\int x2+x+1x+1\,dx$

$$\int \frac{x^2+x+1}{x+1}\,dx=\int\left(x+\frac{1}{x+1}\right)\,dx=\frac{1}{2}x^2+\ln|x+1|+C$$

تكاملات الاقترانات المتشعبة

أتحقق من فهمي صفحة 19

(a) إذا كان: $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<1\\ 2x, & x\geq 1\end{cases}$ ، فأجد قيمة: $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$.

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(1+x)\,dx+\int_{1}^{3}2x\,dx=\left(x+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{1}+x^2\Big|_{1}^{3}=\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(-1+\frac{1}{2}\right)+9-1=10$$

(b) إذا كان: $f(x)=|1-x|$ ، فأجد قيمة: $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leq 1\\ x-1, & x>1\end{cases}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{1}(1-x)\,dx+\int_{1}^{2}(x-1)\,dx=\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-2}^{1}+\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big|_{1}^{2}=\left(1-\frac{1}{2}\right)-(-2-2)+(2-2)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=5$$

(c) إذا كان: $f(x)=|x^2-1|$ ، فأجد قيمة: $\int_{-4}^{0} f(x)\,dx$.

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<-1\\ 1-x^2, & -1\leq x\leq 1\\ x^2-1, & x>1\end{cases}\int_{-4}^{0} f(x)\,dx=\int_{-4}^{-1}(x^2-1)\,dx+\int_{-1}^{0}(1-x^2)\,dx=\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\Big|_{-4}^{-1}+\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{0}=\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(-\frac{64}{3}+4\right)+(0-0)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{56}{3}$$

تطبيقات التكامل: الشرط الأولي

أتحقق من فهمي صفحة 20

تلوث: تسرب نفط من ناقلة بحرية، مكوناً بقعة دائرية الشكل على سطح الماء، نصف قطرها $R(t)$ قدماً بعد t دقيقة من بدء التسرب. إذا كان نصف قطر الدائرة يزداد بمعدل: $R'(t)=\frac{210.07}{t+5}$ ، فأجد $R(t)$ ، علماً بأن $R(0) = 0$.

$$R(t)=\int\frac{210.07}{t+5}\,dt=210.07\int\frac{0.07}{0.07t+5}\,dt=300\ln|0.07t+5|+C$$
$$R(0)=300\ln 5+C=0+300\ln 5+C\Rightarrow C=-300\ln 5$$
$$R(t)=300\ln|0.07t+5|-300\ln 5=300\ln\left|\frac{0.07t+5}{5}\right|=300\ln|0.014t+1|$$

تطبيقات التكامل: الحركة في مسار مستقيم

أتحقق من فهمي صفحة 23

يتحرك جُسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 3 \cos t$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

(a) إذا بدأ الجُسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقع الجُسيم بعد π6 ثانية من بدء الحركة.

$s(t)=\int v(t)\ dt=\int 3\cos\ t\ dt=3\sin\ t+Cs(0)=3\sin\ 0+C0=3\sin\ 0+C\Rightarrow C=0s(t)=3\sin\ ts(\pi 6)=3\sin\ (\pi 6)=1.5m$

(b) أجد إزاحة الجسيم في الفترة $[0,\ 2\pi]$.

$s(2\pi)-s(0)=3\sin\ (2\pi)-3\sin\ (0)=0\ m$

(c) أجد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة $[0,\ 2\pi]$.

$|v(t)|=|3\cos\ t|=\{3\cos\ t,0\le t<\pi 2-3\cos\ t,\pi 2\le t\le 3\pi 23\cos\ t,3\pi 2<t\le 2\pi\int 02\pi|v(t)|\ dx=\int 0\pi 23\cos\ t\ dx+\int \pi 23\pi 2-3\cos\ t\ dx+\int 3\pi 22\pi 3\cos\ t\ dx=3\sin\ t|0\pi 2-3\sin\ t|\pi\pi 23\pi 2+3sint\ |3\pi 22\pi=(3-0)-(-3-3)+(0-(-3))=12m$