

إجابات كتاب التمارين

التكامل بالتعويض

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(1) $\int \sqrt{x^2+4} \, dx$

$$u = x^2 + 4 \Rightarrow du = 2x \, dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \int \sqrt{x^2+4} \, dx = \int \frac{u \, du}{2x} = \int \frac{1}{2} \sqrt{2u-4} \, du$$

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{2u-4} \, du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (2u-4)^{3/2} + C = \frac{1}{3} (2x^2+4-4)^{3/2} + C = \frac{1}{3} (2x^2)^{3/2} + C = \frac{2\sqrt{2}}{3} x^3 + C$$

(2) $\int (1 - \cos x^2)^2 \sin x^2 \, dx$

$$u = 1 - \cos x^2 \Rightarrow du = 2 \sin x^2 \, dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2 \sin x^2} \int (1 - \cos x^2)^2 \sin x^2 \, dx = \int \frac{u^2 \sin x^2 \, du}{2 \sin x^2} = \frac{1}{2} \int u^2 \, du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{6} (1 - \cos x^2)^3 + C$$

(3) $\int \csc^5 x \cos^3 x \, dx$

$$\int \csc^5 x \cos^3 x \, dx = \int \csc^3 x \sin^5 x \cos^3 x \, dx = \int \cot^3 x \csc^2 x \, dx \quad u = \cot x \Rightarrow du = -\csc^2 x \, dx$$

$$\int \csc^5 x \cos^3 x \, dx = \int \cot^3 x \csc^2 x \, dx = \int -u^3 \, du = -\frac{1}{4} u^4 + C = -\frac{1}{4} \cot^4 x + C$$

(4) $\int \sqrt{x} \sin x^2 \, dx$

$$u = x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2\sqrt{x}} \int \sqrt{x} \sin x^2 \, dx = \int \frac{1}{2} \sin u \, du = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos x^2 + C$$

(5) $\int x^3 (x+2)^7 \, dx$

$$u = x+2 \Rightarrow dx = du, x = u-2 \int x^3 (x+2)^7 \, dx = \int (u-2)^3 u^7 \, du = \int (u^{10} - 6u^9 + 12u^8 - 8u^7) \, du = \frac{1}{11} u^{11} - \frac{6}{10} u^{10} + \frac{12}{9} u^9 - \frac{8}{8} u^8 + C = \frac{1}{11} (x+2)^{11} - \frac{3}{5} (x+2)^{10} + \frac{4}{3} (x+2)^9 - (x+2)^8 + C$$

(6) $\int \ln x \sqrt{x} \, dx$

$$\int \ln x \sqrt{x} \, dx = \int \frac{1}{2} \ln x \sqrt{x} \, dx \quad u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} \, dx \Rightarrow dx = x \, du \int \ln x \sqrt{x} \, dx = \int \frac{1}{2} \ln x \sqrt{x} \, dx = \frac{1}{2} \int u \sqrt{e^u} \, du = \frac{1}{2} \int u e^{u/2} \, du = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} e^{u/2} (u - 2) + C = \frac{2}{9} (\ln x)^2 \sqrt{x} + C$$

$$(7) \int e^{2x} dx$$

$$u = x \Rightarrow du = dx = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du \int e^{2x} dx = \int e^u \times \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$(8) \int \sin(\ln 4x^2) x dx$$

$$\int \sin(\ln 4x^2) x dx = \int \sin(2 \ln 2x) x dx \quad u = 2 \ln 2x \Rightarrow du = \frac{2}{x} dx \Rightarrow dx = \frac{x}{2} du \int \sin(\ln 4x^2) x dx = \int \sin u \times \frac{x^2}{2} du = \frac{1}{2} \int \sin u du = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos(2 \ln 2x) + C = -\frac{1}{2} \cos(\ln 4x^2) + C$$

$$(9) \int \sec^2 x \cos^3(\tan x) dx$$

$$u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x \Rightarrow \sec^2 x dx = du \int \sec^2 x \cos^3(\tan x) dx = \int \cos^3 u du = \int \cos u \cos^2 u du = \int \cos u (1 - \sin^2 u) du = \int \cos u - \sin^2 u \cos u du = \int \cos u - \frac{1}{3} \sin^3 u du = \sin u - \frac{1}{3} \sin^3 u + C = \sin(\tan x) - \frac{1}{3} \sin^3(\tan x) + C$$

ملحوظة: يمكن إيجاد هذا التكامل بإعادة كتابته على الصورة:

$$\int \sec^2 x \cos(\tan x) (1 - \sin^2(\tan x)) dx$$

$u = \sin(\tan x)$ وبتعويض واحد فقط هو .

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$\int (10x^8 + 1) dx$$

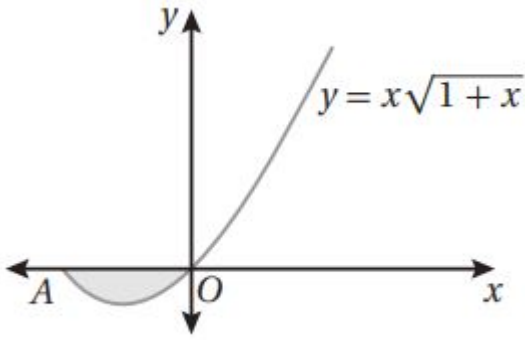
$$\int (11x^5 + 25) dx$$

$$\int (\cos^2 x + \sin^2 x) dx$$

$$\int (13x^3 + 1) dx$$

$$\int (14x^2 \cos^2 \frac{\pi}{4} + \tan x) dx$$

$$\int (15x^2 \sin^3 \frac{\pi}{3} + \cos^2 x) dx$$



(16) يبين الشكل المجاور جزءاً من منحنى الاقتران: $f(x) = x\sqrt{1+x}$.

أجد مساحة المنطقة المظللة في هذا الشكل.

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونقطة يمر بها منحنى $y=f(x)$ أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

$$(x; (\pi/4, 0)) \quad f'(x) = 16 \sin 3x$$

$$(f'(x) = x^2 + 5; (2, 1)) \quad (18)$$

(19) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = -2t(1+t^2)^{3/2}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم هو $4m$ ، فأجد موقع الجسيم بعد t ثانية.