

إجابات كتاب التمارين

التكامل بالتعويض

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(1) $\int \sqrt{x^2+4} \, dx$

$$u = x^2 + 4 \Rightarrow du = 2x \, dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \int \sqrt{x^2+4} \, dx = \int \frac{u}{2x} \frac{du}{2x} = \int \frac{u}{4x^2} du = \int \frac{u}{4(u-4)} du = \frac{1}{4} \int \frac{u}{u-4} du = \frac{1}{4} \int \left(1 + \frac{4}{u-4} \right) du = \frac{1}{4} \left(u + 4 \ln|u-4| \right) + C = \frac{1}{4} (x^2 + 4 + 4 \ln|x^2+4-4|) + C = \frac{1}{4} (x^2 + 4 \ln|x^2|) + C$$

(2) $\int (1 - \cos x^2)^2 \sin x^2 \, dx$

$$u = 1 - \cos x^2 \Rightarrow du = 2 \sin x^2 \, dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2 \sin x^2} \int (1 - \cos x^2)^2 \sin x^2 \, dx = \int \frac{u^2 \sin x^2}{2 \sin x^2} du = \frac{1}{2} \int u^2 du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{6} (1 - \cos x^2)^3 + C$$

(3) $\int \csc^5 x \cos^3 x \, dx$

$$\int \csc^5 x \cos^3 x \, dx = \int \csc^3 x \sin^5 x \cos^3 x \, dx = \int \cot^3 x \csc^2 x \, dx \quad u = \cot x \Rightarrow du = -\csc^2 x \, dx \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x} \int \cot^3 x \csc^2 x \, dx = \int \frac{u^3 \csc^2 x}{-\csc^2 x} du = -\int u^3 du = -\frac{1}{4} u^4 + C = -\frac{1}{4} \cot^4 x + C$$

(4) $\int x \sin x^2 \, dx$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x \, dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \int x \sin x^2 \, dx = \int \frac{u \sin u}{2x} \frac{du}{2x} = \frac{1}{4} \int u \sin u \, du = -\frac{1}{4} u \cos u + \frac{1}{4} \cos u + C = -\frac{1}{4} x^2 \cos x^2 + \frac{1}{4} \cos x^2 + C$$

(5) $\int x^3 (x+2)^7 \, dx$

$$u = x+2 \Rightarrow dx = du, x = u-2 \int x^3 (x+2)^7 \, dx = \int (u-2)^3 u^7 \, du = \int (u^10 - 6u^9 + 12u^8 - 8u^7) \, du = \frac{1}{11} u^{11} - \frac{6}{10} u^{10} + \frac{12}{9} u^9 - \frac{8}{8} u^8 + C = \frac{1}{11} (x+2)^{11} - \frac{3}{5} (x+2)^{10} + \frac{4}{3} (x+2)^9 - (x+2)^8 + C$$

(6) $\int \ln x \, dx$

$$\int \ln x \, dx = \int \frac{1}{x} \ln x \, dx \quad u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} \, dx \Rightarrow dx = x \, du \int \ln x \, dx = \int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \int \frac{1}{x} u \, dx = \int u \, du = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$$

(7) $\int e^{2x} dx$

$$u = x \Rightarrow du = dx = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du \int e^{2x} dx = \int e^u \times \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} e^u + C = e^x + C$$

(8) $\int \sin(\ln 4x^2) x dx$

$$\int \sin(\ln 4x^2) x dx = \int \sin(2 \ln 2x) x dx \quad u = 2 \ln 2x \Rightarrow du = \frac{2}{x} dx \Rightarrow dx = \frac{x}{2} du$$

$$\int \sin(\ln 4x^2) x dx = \int \sin u \times \frac{x}{2} \times \frac{x}{2} du = \frac{1}{4} \int \sin u du = -\frac{1}{4} \cos u + C = -\frac{1}{4} \cos(2 \ln 2x) + C = -\frac{1}{4} \cos(\ln 4x^2) + C$$

(9) $\int \sec^2 x \cos^3(\tan x) dx$

$$u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x \Rightarrow \sec^2 x dx = du \int \sec^2 x \cos^3(\tan x) dx = \int \cos^3 u du$$

$$= \int \cos u \cos^2 u du = \int \cos u (1 - \sin^2 u) du = \int \cos u du - \int \sin^2 u \cos u du$$

$$= \sin u - \frac{1}{3} \sin^3 u + C = \sin(\tan x) - \frac{1}{3} \sin^3(\tan x) + C$$

ملحوظة: يمكن إيجاد هذا التكامل بإعادة كتابته على الصورة:

$$\int \sec^2 x \cos(\tan x) (1 - \sin^2(\tan x)) dx$$

$u = \sin(\tan x)$ وبتعويض واحد فقط هو .

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(10) $\int (208x^4 + 1) dx$

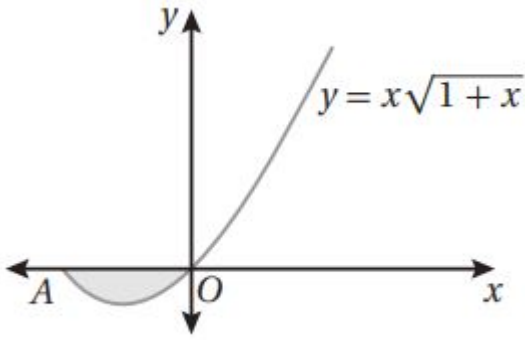
(11) $\int (x-1) dx$

(12) $\int (2x^1 + \cos 0\pi/2 \sin) dx$

(13) $\int (x^3 + 1) dx$

(14) $\int (4x \cos 20\pi/4 \tan) dx$

(15) $\int (15x \sin 30\pi/3 \cos 2) dx$



(16) يبين الشكل المجاور جزءاً من منحنى الاقتران: $f(x) = x\sqrt{1+x}$.

أجد مساحة المنطقة المظللة في هذا الشكل.

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونقطة يمر بها منحنى $y=f(x)$ أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

$$(x; (\pi/4, 0)) \quad f'(x) = 16 \sin 3x$$

$$(f'(x) = x^2 + 5; (2, 1)) \quad (18)$$

(19) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = -2t(1+t^2)^{3/2}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم هو $4m$ ، فأجد موقع الجسيم بعد t ثانية.