

إجابات كتاب التمارين

التكامل بالتعويض

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\int (x^2+3) dx \quad (1)$$

$$x^2+3 \Rightarrow dx = du \Rightarrow du = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \int (x^2+3) dx = \int \frac{u^2+3}{2} du = \frac{1}{2} \int (u^2+3) du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^3}{3} + 3u \right) + C = \frac{1}{6} (x^2+3)^3 + C$$

$$\int (x^4 e^{5x^5+2}) dx \quad (2)$$

$$x^4 e^{5x^5+2} \Rightarrow dx = du \Rightarrow du = 5x^4 \Rightarrow dx = \frac{du}{5x^4} \int (x^4 e^{5x^5+2}) dx = \int \frac{e^u}{5} du = \frac{1}{5} e^u + C = \frac{1}{5} e^{5x^5+2} + C$$

$$\int (x+1)(x^2+2x+5)^4 dx \quad (3)$$

$$(x+1)(x^2+2x+5)^4 \Rightarrow dx = du \Rightarrow du = 2x+2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x+2} \int (x+1)(x^2+2x+5)^4 dx = \int \frac{(x+1)u^4}{2(x+1)} du = \frac{1}{2} \int u^4 du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{10} (x^2+2x+5)^5 + C$$

$$\int (x^3 \ln x) dx \quad (4)$$

$$x^3 \ln x \Rightarrow dx = du \Rightarrow du = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x du \int (x^3 \ln x) dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(x^4 \ln x - \int x^3 dx)}{4} + C = \frac{x^4 \ln x - \frac{x^4}{4}}{4} + C = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C$$

$$\int (x \sin^4 x \cos x) dx \quad (5)$$

$$x \sin^4 x \cos x \Rightarrow dx = du \Rightarrow du = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x} \int (x \sin^4 x \cos x) dx = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

$$\int (x^1 + 3 \cos x) \sin x dx \quad (6)$$

$$(x^1 + 3 \cos x) \sin x \Rightarrow dx = du \Rightarrow du = \sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sin x} \int (x^1 + 3 \cos x) \sin x dx = \int (u^2 + 3 \cos x) du = \frac{u^3}{3} + 3 \sin x + C = \frac{(x^2 + 3 \cos x)^3}{3} + 3 \sin x + C$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$\int_1^2 (12x^2(x^3+1)^2) dx \quad (7)$$

$$\begin{aligned} 12x^2(x^3+1)^2 dx &= u^2 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2} \\ \int_1^2 12x^2(x^3+1)^2 dx &= \int_2^9 2u^2 \frac{du}{3} = \frac{2}{3} \int_2^9 u^2 du = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{3} u^3 \right]_2^9 = \frac{2}{9} (9^3 - 2^3) = \frac{2}{9} (729 - 8) = \frac{2}{9} \cdot 721 = \frac{1442}{9} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 (1x^3x^2+2) dx \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1x^3x^2+2) dx &= \int_0^1 (3x^2+2) dx \\ &= \left[x^3 + 2x \right]_0^1 = (1 + 2) - (0 + 0) = 3 \end{aligned}$$

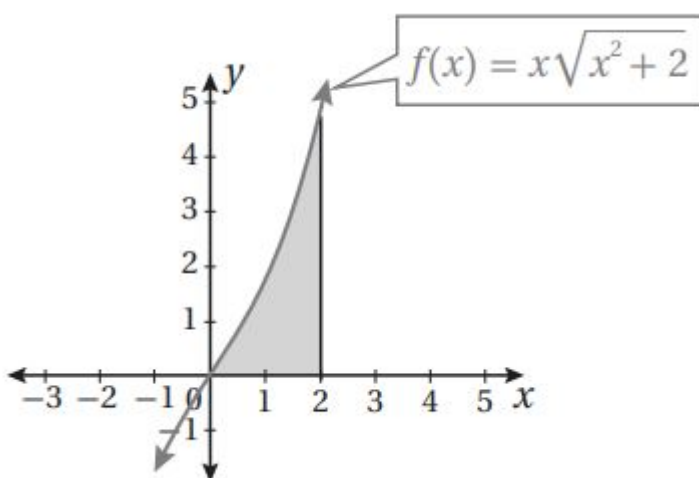
$$\int_1^e (x)^{2x} dx \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \int_1^e (x)^{2x} dx &= \int_1^e e^{2x \ln x} dx \\ &= \int_1^e e^{2x \ln x} dx \end{aligned}$$

$$\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^5 dx \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^5 dx &= \int_0^3 (x+1)u^5 \frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^3 (x+1)u^5 du \end{aligned}$$

(11) أجد مساحة المنطقة المظللة في التمثيل البياني المجاور.



$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 x\sqrt{x^2+2} dx \\ &= \int_0^2 x(x^2+2)^{1/2} dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{3} (x^2+2)^{3/2} dx \end{aligned}$$

(12) الإيراد الحدي: يمثل الاقتران: $R'(x) = 50 + 3.5xe^{-0.1x^2}$ الإيراد الحدي (بالدينار) لكل قطعة تباع من إنتاج إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المباعة، و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$ ، علماً بأن $R(0) = 0$.

$$R(x) = \int (50 + 3.5xe^{-0.1x^2}) dx = \int 50 dx + \int 3.5xe^{-0.1x^2} dx = 50x + \int 3.5xe^{-0.1x^2} dx$$

$$u = -0.1x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -0.2x \Rightarrow dx = \frac{du}{-0.2x}$$

$$\int 3.5xe^{-0.1x^2} dx = \int 3.5x e^u \frac{du}{-0.2x} = \int -17.5e^u du = -17.5e^u + C = -17.5e^{-0.1x^2} + C$$

$$R(0) = 0 \Rightarrow 0 - 17.5 + C = 0 \Rightarrow C = 17.5$$

يمثل الاقتران $f'(x)$ في كل مما يأتي ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ المار بالنقطة المعطاة، أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

(13) $f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2; (2, 10)$

$$f(x) = \int 2x(4x^2 - 10)^2 dx$$

$$u = 4x^2 - 10 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 8x \Rightarrow dx = \frac{du}{8x}$$

$$\int 2x(4x^2 - 10)^2 dx = \int 2x u^2 \frac{du}{8x} = \int \frac{1}{4} u^2 du = \frac{1}{12} u^3 + C$$

$$f(2) = 10 \Rightarrow \frac{1}{12} (4 \cdot 2^2 - 10)^3 + C = 10 \Rightarrow \frac{1}{12} (16 - 10)^3 + C = 10 \Rightarrow \frac{1}{12} (6)^3 + C = 10 \Rightarrow 3 + C = 10 \Rightarrow C = 7$$

$$f(x) = \frac{1}{12} (4x^2 - 10)^3 + 7$$

(14) $f'(x) = x^2 e^{-0.2x^3}; (0, 32)$

$$f(x) = \int x^2 e^{-0.2x^3} dx$$

$$u = -0.2x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -0.6x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{-0.6x^2}$$

$$\int x^2 e^{-0.2x^3} dx = \int x^2 e^u \frac{du}{-0.6x^2} = \int -\frac{1}{6} e^u du = -\frac{1}{6} e^u + C = -\frac{1}{6} e^{-0.2x^3} + C$$

$$f(0) = 32 \Rightarrow -\frac{1}{6} e^{-0.2 \cdot 0^3} + C = 32 \Rightarrow -\frac{1}{6} e^0 + C = 32 \Rightarrow -\frac{1}{6} + C = 32 \Rightarrow C = 32 + \frac{1}{6} = \frac{193}{6}$$

$$f(x) = -\frac{1}{6} e^{-0.2x^3} + \frac{193}{6}$$

(15) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$v(t) = t^2 + 1$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية من بدء الحركة.

$$s(t) = \int (t^2 + 1) dt = \frac{1}{3} t^3 + t + C$$

$$\frac{ds}{dt} = 2t \Rightarrow dt = \frac{ds}{2t}$$

$$\int (t^2 + 1) dt = \int \frac{1}{2} (u^2 + 1) \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \int \frac{u^2 + 1}{u} du = \frac{1}{2} \int (u + \frac{1}{u}) du = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} u^2 + \ln|u|) + C = \frac{1}{4} u^2 + \frac{1}{2} \ln|u| + C$$

$$s(t) = \frac{1}{4} (t^2 + 1)^2 + \frac{1}{2} \ln|t^2 + 1| + C$$

$$s(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} (0^2 + 1)^2 + \frac{1}{2} \ln|0^2 + 1| + C = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} (1) + \frac{1}{2} \ln(1) + C = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} + 0 + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$$

$$s(t) = \frac{1}{4} (t^2 + 1)^2 + \frac{1}{2} \ln|t^2 + 1| - \frac{1}{4}$$