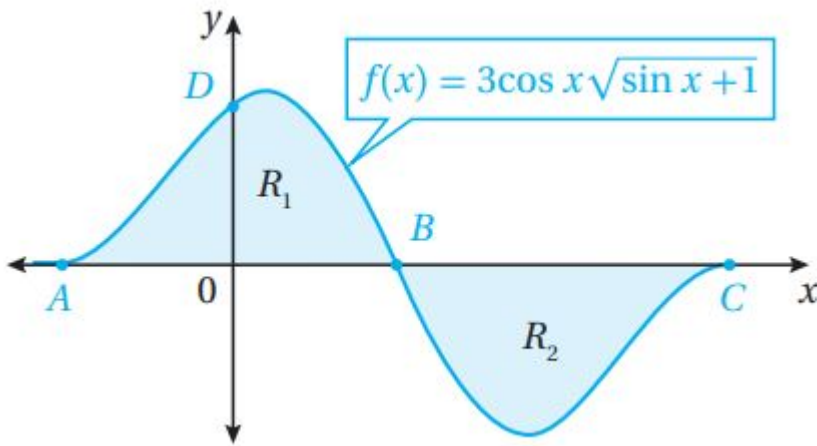


## مهارات التفكير العليا

### التكامل بالتعويض



تبرير: إذا كان الشكل المجاور  
بمثل منحنى الاقتران:  
 $f(x) = 3\cos x \sqrt{\sin x + 1}$ ، فأجيب  
عن الأسئلة الآتية تبعاً:

(40) أجد إحداثي كل من النقاط: A, B, C, D.

$$x=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow 3\cos x = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

يوجد عدد لا نهائي من الحلول لهاتين المعادلتين، نريد أصغر حلين موجبين (الإحداثي  
x للنقطتين B, C) وأكبر حل سالب (الإحداثي x للنقطة A).

أصغر حلين موجبين هما:  $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ ، بوضع  $n = 0$

$$(B(\frac{\pi}{2}, 0), C(\frac{3\pi}{2}, 0) \Rightarrow$$

أكبر حل سالب هو:  $x = -\frac{\pi}{2}$ ، بوضع  $n = -1$

$$(A(-\frac{\pi}{2}, 0) \Rightarrow$$

أما النقطة D فإحداثياها هما:  $(D(0, f(0))) = (0, 3)$

(41) أجد مساحة المنطقة المظللة.

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x \sqrt{\sin x + 1} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 3\cos x \sqrt{\sin x + 1} dx$$

$$u = \sin x + 1 \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$A = 3 \int_{0}^2 \sqrt{u} du + 3 \int_{0}^2 \sqrt{u} du = 6 \int_{0}^2 \sqrt{u} du = 4u^{3/2} \Big|_0^2 = 4(2\sqrt{2} - 0) = 8\sqrt{2}$$

(42) أبين أن للمنطقة  $R_1$  والمنطقة  $R_2$  المساحة نفسها.

من حل السؤال السابق نجد أن:

$$\int_0^{\pi/2} 3u du = 42A(R_2) = -\int_{\pi/2}^{\pi} 2(3\cos x + \sin x) dx = -\pi^2 \int_{\pi/2}^{\pi} (3\cos x + \sin x) dx = -\int_0^{\pi/2} 2(3\cos x + \sin x) dx = 42 \Rightarrow A(R_1) = A(R_2)$$

(43) تحدد: أجد قيمة  $\int_1^{16} (x^3 + 1) dx$ .

$$u = 1 + x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}, x^3 = u - 1 \Rightarrow u = 2x^3 = 16 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow u = 9 \Rightarrow \int_1^{16} (x^3 + 1) dx = \int_9^{16} \frac{u}{3} du = \frac{1}{3} \int_9^{16} u du = \frac{1}{3} \left[ \frac{u^2}{2} \right]_9^{16} = \frac{1}{6} (256 - 81) = \frac{175}{6}$$

(44) تبرير: إذا كان  $f$  اقتراناً متصلاً، فأثبت أن:  $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$ .

$$u = \pi - x \Rightarrow du = -dx, \sin(\pi - x) = \sin x \Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin(\pi - x)) (-dx) = \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$$

(45) تبرير: إذا كان  $a, b$  عددين حقيقيين موجبين، فأثبت أن:  $\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$ .

bbb

تحدد: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(46)  $\int_1^e (\ln x) dx$

bbb

(47)  $\int_0^{\pi/2} (\cos x \sin x - \cos^2 x) dx$

bbb

(48)  $\int_0^1 (2x + 1) \sin x dx$

bbb