

## أتحقق من فهمي

### التكامل بالكسور الجزئية

عوامل المقام كثيرات حدود خطية مختلفة

أتحقق من فهمي صفحة (49):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$(x-7x^2-x-6)dx \text{ (a)}$$

$$\begin{aligned} x-7x^2-x-6 &= x-7(x-3)(x+2) = Ax-3+Bx+2 \Rightarrow x-7 = A(x+2)+B(x-3) \\ x=3 &\Rightarrow A = -45 \\ x=-2 &\Rightarrow B = 95 \\ \int x-7x^2-x-6 dx &= \int (-45x-3+95x+2) dx = -\frac{45}{2}|x+2| + C|x-3| + 95 \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

$$(3x-1x^2-1)dx \text{ (b)}$$

$$\begin{aligned} 3x-1x^2-1 &= 3x-1(x-1)(x+1) = Ax-1+Bx+1 \Rightarrow 3x-1 = A(x+1)+B(x-1) \\ |x-1|+2|x=1 &\Rightarrow A = 1 \\ x=-1 &\Rightarrow B = 2 \\ \int 3x-1x^2-1 dx &= \int (1x-1+2x+1) dx = \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

عوامل المقام كثيرات حدود خطية، أحدها مكرر

أتحقق من فهمي صفحة (51):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$(x+4(2x-1)(x-1)^2)dx \text{ (a)}$$

$$\begin{aligned} x+4(2x-1)(x-1)^2 &= A2x-1+Bx-1+C(x-1)^2 \Rightarrow x+4 = A(x-1)^2+B(2x-1)(x-1)+C(2x-1) \\ x=1 &\Rightarrow A = 18 \\ x=0 &\Rightarrow C = 5 \\ x=2 &\Rightarrow 4 = A+B-C \Rightarrow B = -9 \\ \int x+4(2x-1)(x-1)^2 dx &= \int (18x-1+-9x-1+5(x-1)^2) dx = 18 \ln|x-1| - 5x-1 + C|2x-1| - 9 \ln|x-1| - 5x-1 + C = 9 \ln|x-1| - 5x-1 + C \end{aligned}$$

$$(x^2-2x-4x^3-4x^2+4x)dx \text{ (b)}$$

$$x^2 - 2x - 4 = Ax(x-2) + Bx + C(x-2)^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = Ax(x-2) + Bx + C(x-2)^2$$

$$x=2 \Rightarrow B = -2, x=0 \Rightarrow C = -1, x=1 \Rightarrow -5 = -A + B + C \Rightarrow A = 2$$

$$\int x^2 - 2x - 4 \, dx = \int (2x(x-2) - 2x - 1(x-2)^2) \, dx = 2 \ln|x-2| + 2x + 2 - \ln|x-2| + C$$

عوامل المقام كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير قابل للتحليل، وغير مكرر

أتحقق من فهمي صفحة (52):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$\int (3x+4)(x-3)(x^2+4) \, dx \quad (a)$$

$$3x+4 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-3)$$

$$x=3 \Rightarrow A = 1, x=0 \Rightarrow 4 = 4A - 3C \Rightarrow C = 0, x=1 \Rightarrow 7 = 5A - 2B - 2C \Rightarrow B = -1$$

$$\int \frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)} \, dx = \int \left( \frac{1}{x-3} - \frac{x}{x^2+4} \right) \, dx = \ln|x-3| - \frac{1}{2} \ln|x^2+4| + C$$

$$\int (7x^2 - x + 1)(x^3 + 1) \, dx \quad (b)$$

$$7x^2 - x + 1 = A(x^3 + 1) + (Bx + C)(x^2 - x + 1)$$

$$x = -1 \Rightarrow A = 3, x = 0 \Rightarrow 1 = A + C \Rightarrow C = -2, x = 1 \Rightarrow 7 = A + 2B + 2C \Rightarrow B = 4$$

$$\int (7x^2 - x + 1)(x^3 + 1) \, dx = \int (3x^3 + 1 + 4x^2 - 2x^2 - x + 1) \, dx = 3 \ln|x^3 + 1| + 2 \ln|x + 1| + 2x - \frac{1}{2} \ln|x^2 - x + 1| + C$$

درجة كثيرة الحدود في البسط مساوية لدرجة كثيرة الحدود في المقام، أو أكبر منها

أتحقق من فهمي صفحة (53):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$\int (4x^3 - 52x^2 - x - 1) \, dx \quad (a)$$

$$\int (4x^3 - 52x^2 - x - 1) \, dx = \int (2x+1)(2x-1)(2x^2-x-1) \, dx = \int \frac{2x+1}{2x-1} \, dx + \int \frac{2x-1}{2x^2-x-1} \, dx + \int \frac{-x-1}{2x^2-x-1} \, dx$$

$$-4(2x+1)(x-1)=A(2x+1)+B(x-1)\Rightarrow 3x-4=A(x-1)+B(2x+1)x=-12\Rightarrow A=113x=1\Rightarrow B=-13$$

$$\int 4x^3-52x^2-x-1dx=\int (2x+1+1132x+1+-13x-1|x-1|+C|2x+1|-13\ln)dx=x^2+x+116\ln$$

$$(x^2+x-1x^2-x)dx \text{ (b)}$$

$$(x^2-x)+Cx^2+x-1x^2-x)dx=\int (1+2x-1x^2-x)dx=x+\ln$$

### التكامل بالكسور الجزئية لتكاملات محدودة

أتحقق من فهمي صفحة (54):

أجد كل قيمة من التكاملين الآتيين:

$$(342x^3+x^2-2x-4x^2-4)dx \text{ (a)}$$

$$\int (342x^3+x^2-2x-4x^2-4)dx=\int 34(2x+1+6xx^2-4)dx=(x^2+x+3\ln|1255)=8+3\ln 12)-(12+3\ln 4)|34=(20+3\ln$$

$$(563x-10x^2-7x+12)dx \text{ (b)}$$

$$3x-10x^2-7x+12=3x-10(x-3)(x-4)=A(x-3)+B(x-4)\Rightarrow 3x-10=A(x-4)+B(x-3)x=3\Rightarrow A=1x=4\Rightarrow B=2$$

$$\int 563x-10x^2-7x+12dx=\int 56(1x-3+2x62=\ln 3+\ln 1)=\ln 2+2\ln 2-(\ln 3+2\ln|x-4|)|56=\ln|x-3|+2\ln|x-4)dx=(\ln$$

### التكامل بالكسور الجزئية، والتكامل بالتعويض

أتحقق من فهمي صفحة (57):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$(x-1)dx \text{ (a)}$$

$$\int \tan^2 \sec^2 x dx$$

$$\int \sec^2 x \tan^2 x dx = \int \sec^2 x (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^4 x dx - \int \sec^2 x dx$$

$$\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x \tan^2 x dx = \int \sec^2 x (1 + \tan^2 x) dx = \int \sec^2 x dx + \int \sec^2 x \tan^2 x dx$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \sec^2 x \tan^2 x dx = \int \tan^2 u du = \int (u^2 - 1) du = \frac{1}{3}u^3 - u + C = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int \frac{1}{(u-1)^2} du = \int (12u-1 + -12u+1) du = 12 \ln|u-1| - 12 \ln u = 12 \ln \left| \frac{u-1}{u} \right| + C = 12 \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C$$

(b)  $\int \frac{1}{(e^x-1)(e^x+4)} dx$

$$\begin{aligned} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{u} \\ \int \frac{1}{(e^x-1)(e^x+4)} dx = \int \frac{1}{(u-1)(u+4)} \frac{du}{u} \\ = \int \frac{1}{(u-1)(u+4)} du = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+4} \Rightarrow 1 = A(u+4) + B(u-1) \\ u=1 \Rightarrow A=15, u=-4 \Rightarrow B=-15 \\ \int \frac{1}{(e^x-1)(e^x+4)} dx = 15 \ln|e^x-1| - 15 \ln|e^x+4| + C \end{aligned}$$