

أتحقق من فهمي

التكامل بالكسور الجزئية

عوامل المقام كثيرات حدود خطية مختلفة

أتحقق من فهمي صفحة (49):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$(x-7x^2-x-6)dx \text{ (a)}$$

$$\begin{aligned} x-7x^2-x-6 &= x-7(x-3)(x+2) = Ax-3+Bx+2 \Rightarrow x-7 = A(x+2)+B(x-3) \\ x=3 &\Rightarrow A = -45 \\ x=-2 &\Rightarrow B = 95 \\ \int x-7x^2-x-6 dx &= \int (-45x-3+95x+2) dx = -\frac{45}{2}x^2 - 3x + \frac{95}{2}x^2 + 2x + C \\ &= \frac{50}{2}x^2 - 3x + 2x + C = 25x^2 - x + C \end{aligned}$$

$$(3x-1x^2-1)dx \text{ (b)}$$

$$\begin{aligned} 3x-1x^2-1 &= 3x-1(x-1)(x+1) = Ax-1+Bx+1 \Rightarrow 3x-1 = A(x+1)+B(x-1) \\ |x-1|=2 &\Rightarrow A = 1 \\ |x+1|=1 &\Rightarrow B = 2 \\ \int 3x-1x^2-1 dx &= \int (1x-1+2x+1) dx = \frac{1}{2}x^2 - x + x^2 + x + C \\ &= \frac{3}{2}x^2 + x - x + C = \frac{3}{2}x^2 + C \end{aligned}$$

عوامل المقام كثيرات حدود خطية، أحدها مكرر

أتحقق من فهمي صفحة (51):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$(x+4(2x-1)(x-1)^2)dx \text{ (a)}$$

$$\begin{aligned} x+4(2x-1)(x-1)^2 &= A2x-1+Bx-1+C(x-1)^2 \Rightarrow x+4 = A(x-1)^2+B(2x-1)(x-1)+C(2x-1) \\ x=1 &\Rightarrow A = 18 \\ x=0 &\Rightarrow C = 5 \\ x=2 &\Rightarrow 4 = A+B-C \Rightarrow B = -9 \\ \int x+4(2x-1)(x-1)^2 dx &= \int (18x-1-9x-1+5(x-1)^2) dx = 18 \ln|x-1| - 5x - 1 + C \\ &= 9 \ln|x-1| - 5x - 1 + C \end{aligned}$$

$$(x^2-2x-4x^3-4x^2+4x)dx \text{ (b)}$$

$$x^2 - 2x - 4 = Ax(x-2) + Bx + C(x-2)^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = Ax^2 - 2Ax + Bx + Cx^2 - 4Cx + 4C$$

$$x^2 - 2x - 4 = (A+C)x^2 + (-2A+B)x + (4C-4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=1 \\ -2A+B=-2 \\ 4C-4=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ C=-1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2 - 2x - 4}{(x-2)^2} dx = \int (2x - 2 + \frac{-1}{x-2}) dx = 2|x-2| + 2x + 2 - \ln|x-2| + C$$

عوامل المقام كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير قابل للتحليل، وغير مكرر

أتحقق من فهمي صفحة (52):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

(a) $\int \frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)} dx$

$$3x+4 = A(x-3) + (Bx+C)(x^2+4)$$

$$3x+4 = Ax - 3A + Bx^3 + Bx + Cx^2 + 4C$$

$$3x+4 = Bx^3 + Cx^2 + (A+B)x + (-3A+4C)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B=0 \\ C=0 \\ A+B=3 \\ -3A+4C=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases}$$

$$\int \frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)} dx = \int \frac{3x}{(x-3)(x^2+4)} dx + \int \frac{4}{(x-3)(x^2+4)} dx$$

$$= \int \frac{3x}{(x-3)(x^2+4)} dx + \int \frac{4}{(x-3)(x^2+4)} dx = \ln|x-3| + C$$

(b) $\int \frac{7x^2 - x + 1}{x^3 + 1} dx$

$$7x^2 - x + 1 = A(x+1) + (Bx+C)(x^2-x+1)$$

$$7x^2 - x + 1 = Ax + A + Bx^3 + Bx + Cx^2 - Cx + C$$

$$7x^2 - x + 1 = Bx^3 + Cx^2 + (A+B)x + (A+C)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B=0 \\ C=0 \\ A+B=7 \\ A+C=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=7 \\ B=0 \\ C=-1 \end{cases}$$

$$\int \frac{7x^2 - x + 1}{x^3 + 1} dx = \int \frac{7x^2}{x^3 + 1} dx + \int \frac{-x + 1}{x^3 + 1} dx$$

$$= \int \frac{7x^2}{x^3 + 1} dx + \int \frac{-x + 1}{x^3 + 1} dx = 3 \ln|x^3 + 1| + C$$

درجة كثيرة الحدود في البسط مساوية لدرجة كثيرة الحدود في المقام، أو أكبر منها

أتحقق من فهمي صفحة (53):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

(a) $\int (4x^3 - 52x^2 - x - 1) dx$

$$\int (4x^3 - 52x^2 - x - 1) dx = \frac{4x^4}{4} - \frac{52x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + C = x^4 - \frac{52x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + C$$

$$-4(2x+1)(x-1)=A2x+1+Bx-1\Rightarrow 3x-4=A(x-1)+B(2x+1)x=-12\Rightarrow A=113x=1\Rightarrow B=-13$$

$$\int 4x^3-52x^2-x-1dx=\int (2x+1+1132x+1+-13x-1|x-1|+C|2x+1|-13\ln)dx=x^2+x+116\ln$$

$$(x^2+x-1x^2-x)dx \text{ (b)}$$

$$(x^2-x)+Cx^2+x-1x^2-x)dx=\int (1+2x-1x^2-x)dx=x+\ln$$

التكامل بالكسور الجزئية لتكاملات محدودة

أتحقق من فهمي صفحة (54):

أجد كل قيمة من التكاملين الآتيين:

$$(342x^3+x^2-2x-4x^2-4)dx \text{ (a)}$$

$$\int (x^2-342x^3+x^2-2x-4x^2-4)dx=\int 34(2x+1+6xx^2-4)dx=(x^2+x+3\ln|1255)=8+3\ln 12)-(12+3\ln 4)|34=(20+3\ln$$

$$(563x-10x^2-7x+12)dx \text{ (b)}$$

$$3x-10x^2-7x+12=3x-10(x-3)(x-4)=Ax-3+Bx-4\Rightarrow 3x-10=A(x-4)+B(x-3)x=3\Rightarrow A=1x=4\Rightarrow B=2$$

$$\int 563x-10x^2-7x+12dx=\int 56(1x-3+2x62=\ln 3+\ln 1)=\ln 2+2\ln 2-(\ln 3+2\ln|x-4|)|56=\ln|x-3|+2\ln|x-4)dx=(\ln$$

التكامل بالكسور الجزئية، والتكامل بالتعويض

أتحقق من فهمي صفحة (57):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$(x-1)dx \text{ (a)}$$

$$\int \tan^2 \sec^2 x dx$$

$$\int x u^2-x-1 dx=\int \sec^2 x \tan^2 x \int \sec^2 x \Rightarrow dx=du \sec^2 x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\sec^2 u=\tan$$

$$x=\int \frac{1}{u^2-1} du \frac{1}{u^2-1}=\frac{1}{(u-1)(u+1)}=A u^{-1}+B u+1 \Rightarrow 1=A(u+1) \int \frac{1}{u^2-1} du$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int \frac{1}{(u-1)^2} du = \int (12u-1 + -12u+1) du = 12 \ln|u-1| - 12 \ln|u| = 12 \ln|x+1| + Cx - 1 \tan|\tan 12 \ln$$

$$\int \frac{1}{(ex-1)(ex+4)} dx \quad (b)$$

$$u = ex \Rightarrow du = ex dx \Rightarrow dx = \frac{du}{ex} \Rightarrow \int \frac{1}{(ex-1)(ex+4)} dx = \int \frac{1}{(u-1)(u+4)} \frac{du}{ex} = \int \frac{1}{(u-1)(u+4)} du$$

$$\frac{1}{(u-1)(u+4)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+4} \Rightarrow 1 = A(u+4) + B(u-1)$$

$$u=1 \Rightarrow A=15 \quad u=-4 \Rightarrow B=-15$$

$$\int \frac{1}{(u-1)(u+4)} du = \int (15 \frac{1}{u-1} - 15 \frac{1}{u+4}) du = 15 \ln|u-1| - 15 \ln|u+4| + C$$

$$\int \frac{1}{(ex-1)(ex+4)} dx = 15 \ln|ex-1| - 15 \ln|ex+4| + C$$