

مهارات التفكير العليا

التكامل بالكسور الجزئية

تبرير: أحل السؤالين الآتيين تباعاً:

(33) أجد: $\int dx \sqrt{1+e^x}$ بطريقتين مختلفتين، إحداهما الكسور الجزئية، مبرراً أجابتي.

الحل الأول بضرب كل من البسط والمقام بـ e^{-x}

$$\int (e^{-x}+1)+C e^x dx = \int e^{-x} e^{-x} + 1 dx = -\int e^{-x} dx + \int 1 dx = -\ln|e^{-x}+1| + C$$

الحل الثاني بالتعويض:

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx = u dx \Rightarrow dx = \frac{du}{u} \int \sqrt{1+e^x} dx = \int \sqrt{1+u} \times \frac{du}{u} = \int \frac{\sqrt{1+u}}{u} du$$

$$\frac{\sqrt{1+u}}{u} = \frac{A}{u} + \frac{B}{\sqrt{1+u}} \Rightarrow 1 = A\sqrt{1+u} + Bu \Rightarrow A = -1, B = 1$$

$$\int \frac{\sqrt{1+u}}{u} du = \int \left(\frac{-1}{u} + \frac{1}{\sqrt{1+u}} \right) du = -\ln|u| + \ln|1+u| + C$$

$$= -\ln(e^x) + \ln(e^x+1) + C = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right) + C = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) + C$$

(34) أجد: $\int \frac{1}{1+e^x} dx$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{e^{-x}+1} dx = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{du}{1+u} = \ln|1+u| + C = \ln(1+e^x) + C$$

(35) تبرير: أثبت أن: $\int \frac{5x^2-8x+12}{(x-1)^2} dx = \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + C$

$$\frac{5x^2-8x+12}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} \Rightarrow 5x^2-8x+12 = A(x-1) + B$$

$$5x^2-8x+12 = Ax - A + B \Rightarrow A = 5, B = 17$$

$$\int \frac{5x^2-8x+12}{(x-1)^2} dx = \int \left(\frac{5}{x-1} + \frac{17}{(x-1)^2} \right) dx = 5 \ln|x-1| - \frac{17}{x-1} + C$$

(36) تبرير: أثبت أن: $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan(x) + C$

$$\int (2x+1)|2x-1| + 116 \ln(4x^2+1) + 116 \ln|2x-1| + 182x+1) dx = -116 \ln|4x^2-14x^2+1| + CC = 116 \ln$$

$$\int (1x-x^3) dx \quad (40)$$

$$u = x^6 \Rightarrow du = 6x^5 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{6x^5} = \frac{du}{6u^{5/6}} = \frac{1}{6} u^{-5/6} du$$

$$\int (1x-x^3) dx = \int (u^{1/6} - u^{3/6}) \cdot \frac{1}{6} u^{-5/6} du = \frac{1}{6} \int (u^{1/6-5/6} - u^{3/6-5/6}) du = \frac{1}{6} \int (u^{-2/3} - u^{-2/6}) du$$

$$= \frac{1}{6} \left(\int u^{-2/3} du - \int u^{-1/3} du \right) = \frac{1}{6} \left(3u^{1/3} - 3u^{2/3} \right) + C = \frac{1}{2} (u^{1/3} - u^{2/3}) + C$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 - x^4) + C$$