

مهارات التفكير العليا

التكامل بالأجزاء

(37) تبرير: أثبت أن: $\int \frac{1}{23x^2} \ln x dx = 9 \ln 1/23x^2 \ln x - 6$.

$$2x | \frac{1}{23} - \int \frac{1}{23x^2} dx = \frac{1}{23} \ln x - \frac{1}{23} \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{23} \ln x + \frac{1}{23} \int x^{-2} dx = \frac{1}{23} \ln x - \frac{1}{23} x^{-1} = \frac{1}{23} \ln x - \frac{1}{23x}$$

(38) تبرير: أثبت أن: $\int \sin \frac{\pi}{4} x \sin 0 \pi - 2165 x dx = 3x$.

$$2x - 116 \sin 8x dx du = dxv = 14 \sin 2x - \cos 3x dx = 12 (\cos 5x \sin u = x dv = \sin 2x - 118x) | 0 \pi 4 - \int 0 \pi 4 (14 \sin 2x - 116 \sin 3x dx = x(14 \sin 5x \sin 8x \int 0 \pi 4 x \sin 8x) | 0 \pi 4 2x + 1128 \cos 8x) | 0 \pi 4 - (-18 \cos 2x - 116 \sin 8x) dx = x(14 \sin 6 \sin = \pi 4 (14) + 0 - 1128 - 18 + 1128 = \pi - 216$$

(39) تبرير: إذا كان: $\int_0^a x e^{x/2} dx = 6$, فأثبت أن a يحقق المعادلة: $x = 2 + e^{-x/2}$.

$$u = x dv = e^{1/2 x} dx du = dxv = 2e^{1/2 x} \int_0^a x e^{1/2 x} dx = 2x e^{1/2 x} | 0^a - \int_0^a 2e^{1/2 x} dx = 2x e^{1/2 x} | 0^a - 4e^{1/2 x} | 0^a = 2a e^{1/2 a} - 4e^{1/2 a} + 4 \Rightarrow 2a e^{1/2 a} - 4e^{1/2 a} + 4 = 6 \Rightarrow 2a e^{1/2 a} = 4e^{1/2 a} + 2$$

بقسمة طرفي المعادلة على $2e^{1/2 a}$ نحصل على:

$$a = 2 + e^{-1/2 a}$$

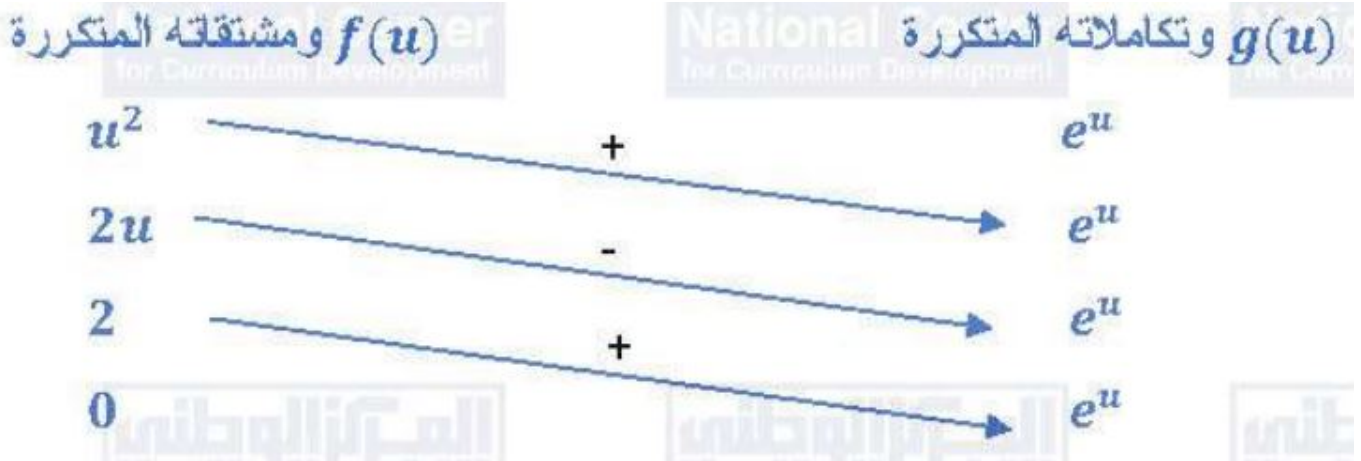
لذا فإن a يحقق المعادلة $x = 2 + e^{-x/2}$

(40) تبرير: أجد: $\int x^2 \ln x dx$ بطريقتين مختلفتين، مبرراً إجابتي.

الطريقة الأولى بالتعويض:

$$x^2 dx = \int u^2 x du = \int u^2 e u du \Rightarrow du dx = 1/x \Rightarrow dx = x du, x = e u \int (\ln u = \ln$$

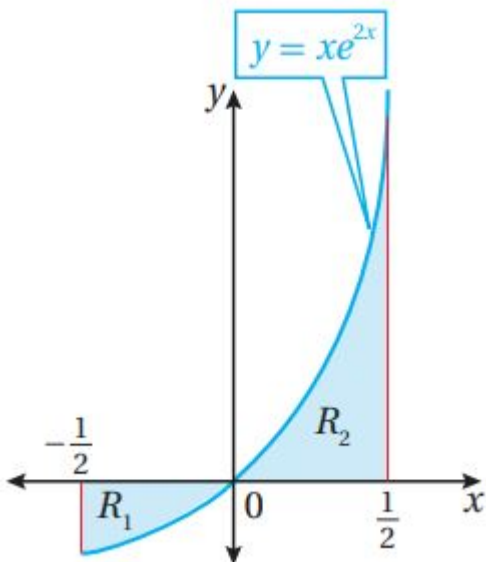
بالأجزاء مرتين، نستخدم الجدول:



$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

الطريقة الثانية: بالأجزاء مباشرة:

$$\int x^2 \ln x dx = \int x^2 \cdot \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$



تبرير: إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران: $y = xe^{2x}$ حيث: $x \leq 1/2 \geq 1/2$, فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(41) أجد مساحة كل من المنطقة R_1 ، والمنطقة R_2 .

$$A_1 = -\int_{-1/2}^0 xe^{2x} dx, A_2 = \int_0^{1/2} xe^{2x} dx$$

نجد التكامل غير المحدود $\int xe^{2x} dx$ بالأجزاء:

$$u = x, dv = e^{2x} \Rightarrow du = dx, v = \frac{1}{2}e^{2x} \Rightarrow \int xe^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

$$x - 14e^{2x} + C = 14e^{2x}(2x - 1) + C \Rightarrow A(R1) = -14e^{2x}(2x - 1) \Big|_{120} = 14 - 12e \\ = e - 24e \quad A(R2) = 14e^{2x}(2x - 1) \Big|_{012} = 0 + 14 = 14$$

(42) أثبت أن مساحة المنطقة R1 إلى مساحة المنطقة R2 تساوي $(e-2):e$.

$$A(R1):A(R2) = e - 24e : 14 = e - 2e \quad A(R1):A(R2) = (e-2):e$$

تحد: استعمل التكامل بالأجزاء لإثبات كل مما يأتي، حيث: n عدد صحيح موجب،
و $a \neq 0$:

$$\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (-1 + (n+1) \ln x) + C \quad (43)$$

$$\int x^{n+1} \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n \, dx \\ = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} (-1 + (n+1) \ln x) + C$$

$$\int x^n e^{ax} \, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - n \int x^{n-1} e^{ax} \, dx \quad (44)$$

$$u = x^n \quad dv = e^{ax} \quad du = nx^{n-1} \, dx \quad v = \frac{1}{a} e^{ax} \\ \int x^n e^{ax} \, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - n \int x^{n-1} e^{ax} \, dx$$