

مهارات التفكير العليا

التكامل بالأجزاء

(37) تبرير: أثبت أن: $\int \ln \frac{1}{23x^2} dx = 9 \ln 1/23x^2 \ln 6 - 215722x dx$.

$$2x | \ln 23 - \int \ln 23 x dx = 13x^3 \ln 23 dx = x^2 dx du = 1x dx v = 13x^3 \int \ln 23 x^2 \ln u = \ln 6 - 215726 - 3 + 172 = 9 \ln 2x | \ln 23 - 19x^3 | \ln 23 = 9 \ln 313x^2 dx = 13x^3 \ln$$

(38) تبرير: أثبت أن: $\int \sin \frac{\pi}{4} x \sin 5x dx = \pi - 2165x \sin 0$.

$$2x - 116 \sin 8x dx du = dx v = 14 \sin 2x - \cos 3x dx = 12 (\cos 5x \sin u = x dv = \sin 2x - 118x) | 0 \pi 4 - \int 0 \pi 4 (14 \sin 2x - 116 \sin 3x dx = x (14 \sin 5x \sin 8x \int 0 \pi 4 x \sin 8x) | 0 \pi 4 2x + 1128 \cos 8x) | 0 \pi 4 - (-18 \cos 2x - 116 \sin 8x) dx = x (14 \sin 6 \sin = \pi 4 (14) + 0 - 1128 - 18 + 1128 = \pi - 216$$

(39) تبرير: إذا كان: $\int_0^a x e^{x/2} dx = 6$, فأثبت أن a يحقق المعادلة: $x = 2 + e^{-x/2}$.

$$u = x dv = e^{12-x} dx du = dx v = 2e^{12x} \int_0^a x e^{12x} dx = 2x e^{12} | 0^a - \int_0^a 2e^{12x} x dx = 2x e^{12x} | 0^a - 4e^{12x} | 0^a = 2ae^{12a} - 4e^{12a} + 4 \Rightarrow 2ae^{12a} - 4e^{12a} + 4 = 62ae^{12-a} = 4e^{12-a} + 2$$

بقسمة طرفي المعادلة على $2e^{12a}$ نحصل على:

$$a = 2 + e^{-12a}$$

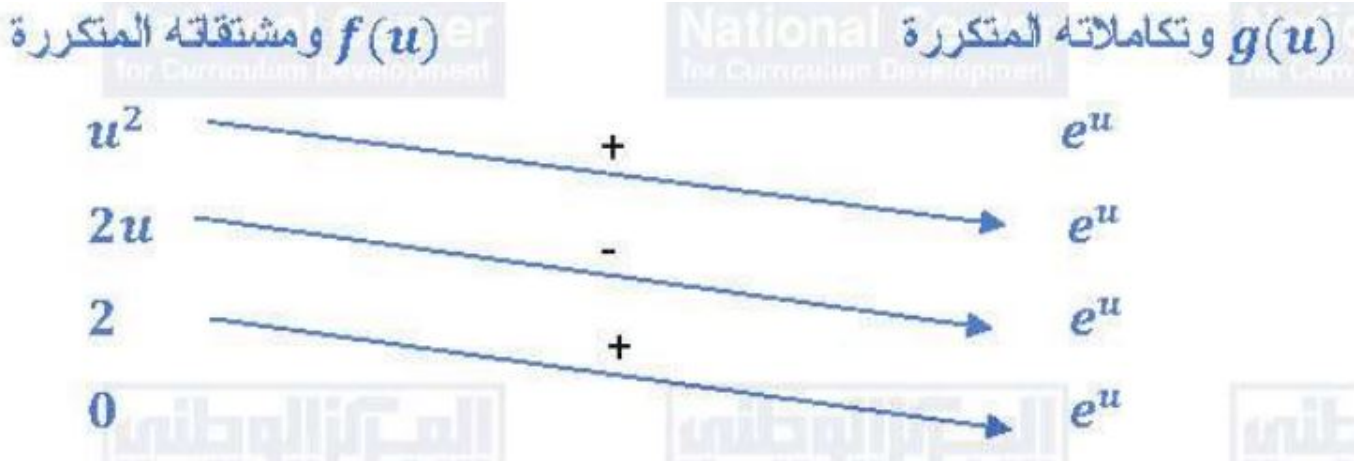
لذا فإن a يحقق المعادلة $x = 2 + e^{-x^2}$

(40) تبرير: أجد: $\int (\ln x)^2 dx$ بطريقتين مختلفتين، مبرراً إجابتي.

الطريقة الأولى بالتعويض:

$$x^2 dx = \int u^2 x du = \int u^2 e u du x \Rightarrow du dx = 1x \Rightarrow dx = x du, x = eu \int (\ln u = \ln$$

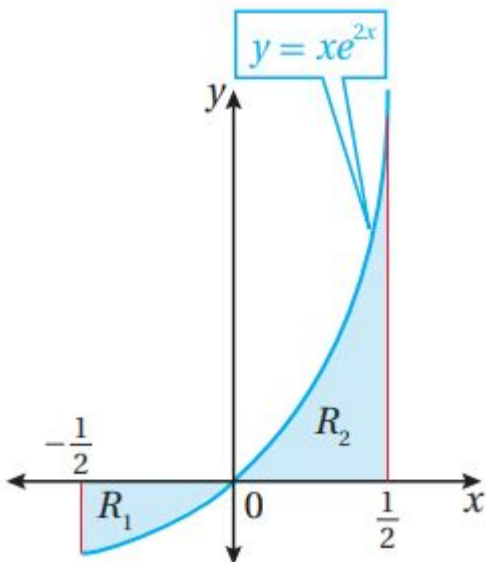
بالأجزاء مرتين، نستخدم الجدول:



$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

الطريقة الثانية: بالأجزاء مباشرة:

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$



تبرير: إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران: $y = xe^{2x}$ حيث: $x \leq -\frac{1}{2}$ أو $x \geq \frac{1}{2}$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(41) أجد مساحة كل من المنطقة R_1 ، والمنطقة R_2 .

$$A_1 = -\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} xe^{2x} dx, A_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} xe^{2x} dx$$

نجد التكامل غير المحدود $\int xe^{2x} dx$ بالأجزاء:

$$u = x, dv = e^{2x} \Rightarrow du = dx, v = \frac{1}{2}e^{2x} \Rightarrow \int xe^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

$$x-14e^{2x}+C=14e^{2x}(2x-1)+C \Rightarrow A(R1)=-14e^{2x}(2x-1)|_{120}=14-12e$$

$$=e-24e \quad A(R2)=14e^{2x}(2x-1)|_{012}=0+14=14$$

(42) أثبت أن مساحة المنطقة R1 إلى مساحة المنطقة R2 تساوي $(e-2):e$.

$$A(R1):A(R2)=e-24e:14=e-2:e$$

تحد: استعمل التكامل بالأجزاء لإثبات كل مما يأتي، حيث: n عدد صحيح موجب،
و $a \neq 0$:

$$\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (-1 + (n+1) \ln x) + C \quad (43)$$

$$\int x^{n+1} \ln x dx = \int x^{n+1} \ln x dv = x^{n+1} \ln x du = \int x^{n+1} \ln u du = \ln x$$

$$x^{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} dx = x^{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = x^{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - n \int x^{n-1} e^{ax} dx \quad (44)$$

$$u = x^n \quad dv = e^{ax} \quad du = nx^{n-1} dx \quad v = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - n \int x^{n-1} e^{ax} dx$$