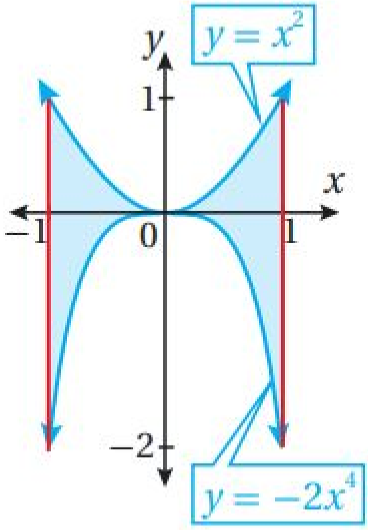
أتدرب وأحل المسائل

المساحات والحجوم

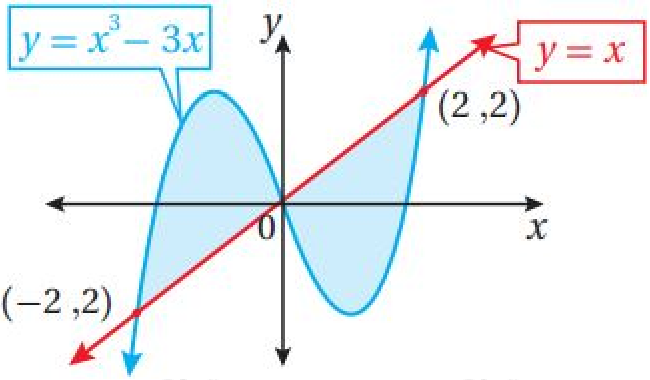
أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلات البيانية الآتية:

1



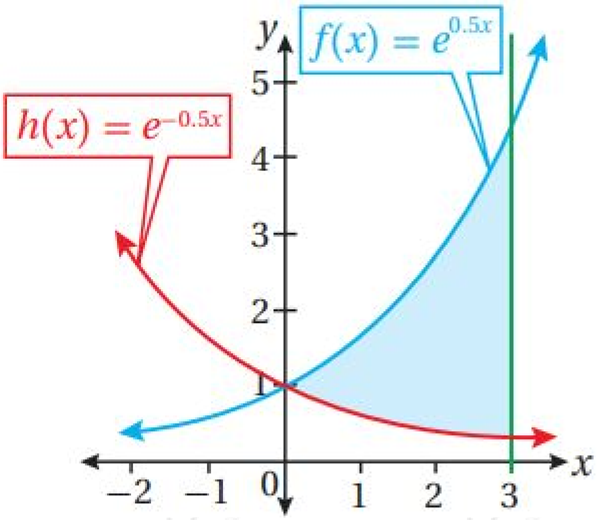
A=∫−11(x2−(−2x4))dx=∫−11(x2+2x4)dx=(13x3+25x5)|−11=(13+25)−(−13−25)=2215

2



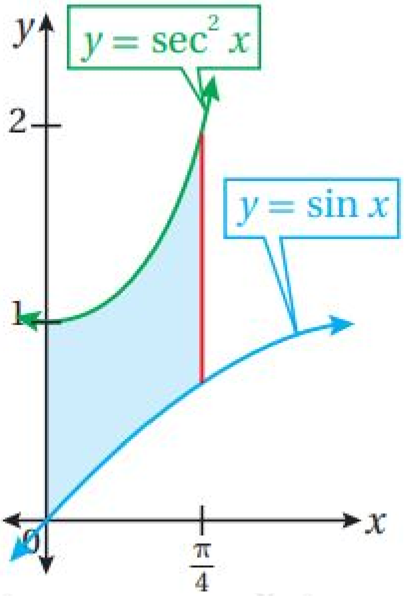
A=∫−20(x3−3x−x)dx+∫02(x−(x3−3x))dx=∫−20(x3−4x)dx+∫02(4x−x3)dx=(14x4−2x2)|−20+(2x2−14x4)|02=(0)−(4−8)+(8−4)−(0)=8

3



A=∫03(e0.5x−e−0.5x)dx=(2e0.5x+2e−0.5x)|03=(2e1.5+2e−1.5)−(2+2)=2e1.5+2e−1.5−4

4



x)|0π4=(1+12)−(0+1)=12x+cosx)dx=(tanx−sinA=∫0π4(sec2

(5) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين:
.:g(x)=2x2,f(x)=12x2+6

f(x)=g(x)⇒12x2+6=2x2⇒32x2=6⇒x2=4⇒x=2,x=−2A=∫−22(f(x)−g(x))dx=∫−22(12x2+6−2x2)dx=∫−22(6−32x2)dx=(6x−12x3)|−22=(12−4)−(−12+4)=16

(6) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: f(x)=4x،,g(x)=3x,، والمستقيم x=1 في الربع الأول.

f(x)=g(x)⟹3x=4x⟹x=0A=∫01(f(x)−g(x))dx=∫01(4x−3x)dx=(4xln 3≈0.3444−2ln3)=3ln4−1ln3)−(1ln4−3ln3)|01=(4ln4−3xln

(7) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: x,f(x)=exg(x)=cos، والمستقيم x=π2، في الربع الأول.

xf(x)=g(x)⟹ex=cos

نعلم من حلول هذه المعادلة الحل غير السالب: x=0

في الربع الأول يكون x≤1cos بينما ex≥1، إذن xex≥cos

x)|0π2=(eπ2−1)−(1−0)=eπ2−2x)dx=(ex−sinA=∫0π2(ex−cos

(8) أجد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: x|=f(x)=x4,|g(x).

g(x)=f(x)⟹x4=|x|⟹x4=xorx4=−xx4=x⟹x4−x=0⇒x(x3−1)=0⟹ x=0,x=1x4=−x⇒x4+x=0⇒x(x3+1)=0⇒x=0,x=−1

إذن، يتقاطع المنحنيان عند x=−1,x=0,x=1، ويكون في الفترتين f(x)>g(x)

A=∫−11(f(x)−g(x))dx

نجزئ هذا التكامل بسبب تغيير قاعدة f(x) حول x، نحسب هذه المساحة على النحو الآتي:

A=∫−10(−x−x4)dx+∫01(x−x4)dx=(−12x2−15x5)|−10+(12x2−15x 5)|01=(0)−(−12+15)+(12−15)−(0)=35

(9) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: g(x)=−x2+2x,f(x)=3x3−x2−10x.

f(x)=g(x)⇒3x3−x2−10x=−x2+2x⇒3x3−12x=0⇒3x(x2−4)=0⇒x=0, x=−2,x=2

بحساب قيمتي الاقترانين عند عدد بين 2- و0 مثل 1- نجد أن:

f(−1)=−3−1+10=6,g(−1)=−1−2=−3

(f(x)>g(x)← في الفترة [-2,0]

بحساب قيمتي الاقترانين عند عدد بين 0 و2 مثل 1 نجد أن:

$f(1)=3-1-10=-8,g(1)=-1+2=1$

(f(x)<g(x)← في الفترة [0,2]

$A=\int-20(f(x)-g(x))dx+\int02(g(x)-f(x))dx=\int-20(3x3-x2-10x-(-x2+2x))dx+\int02(-x2+2x-(3x3-x2-10x))dx=\int-20(3x3-12x)dx+\int02(12x-3x3)dx=(34x4-6x2)|-20+(6x2-34x4)|02=(0)-(12-24)+(24-12)-(0)=24$

(10) أجد مساحة المنطقة المحصورة بيـن منحنيي الاقترانين$(x)=x2,f(x)=ex$، والمستقيمين: $x=0,x=1$.

$f(x)=g(x)\Longrightarrow ex=x2$

يمكن استعمال الآلة الحاسبة لمعرفة أن (f(x)>g(x في الفترة [0,∞)

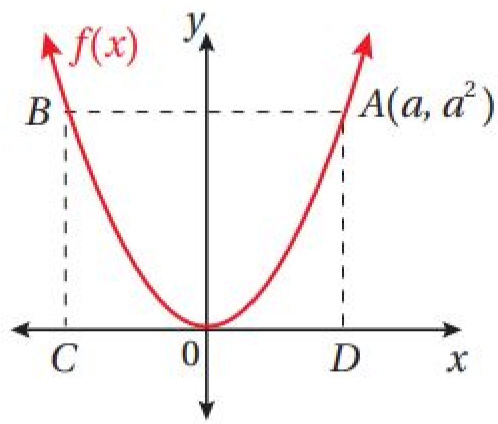
$A=\int01(ex-x2)dx=(ex-13x3)|01=(e-13)-(1-0)=e-43$

(11) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحيي الاقترانين: $h(x)=4x,f(x)=12x2$.

$f(x)=h(x)\Rightarrow12x2=4x\Rightarrow14x4=16x\Rightarrow x4-64x=0\Rightarrow x(x3-64)=0\Rightarrow x=0,x=4$

(h(x)>f(x في الفترة (0,4)

$A=\int04(h(x)-f(x))dx=\int04(4x-12x2)dx=(83x32-16x3)|04=(643-323)-(0)=323$



(12) يبين الشكل التالي منحنى الاقتران: f(x)=x2. إذا كان إحداثيا النقطة A هما A(a,a2)، فأثبت أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران f(x) والقطعة المستقيمة AB¯ تساوي ثلثي مساحة المستطيل ABCD.

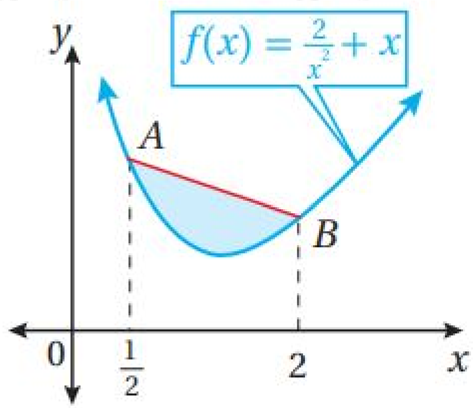
من التماثل فإن B(−a,a2)

لتكن مساحة المنطقة المطلوبة:

∫−aa(a2−x2)dx=(a2x−13x3)|−aa=(a3−13a3)−(−a3+13a3)=2a3−23a3=43a3

مساحة المستطيل ABCD هي: 2a×a2=2a3

إذن، المساحة بين المنحنى والقطعة المستقيمة AB تساوي 23 مساحة المستطيل ABCD.



(13) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران: f(x)=2x2+x. إذا كان الإحداثي x لكل من النقطة A والنقطة B هو 12 و2 على الترتيب، فأجد مساحة المنطقة المحصورة بين المستقيم AB ومنحنى الاقتران f(x).

A(12,f(12))=(12,172)B(2,f(2))=(2,52)

ميل AB:

−4=172−5212−2

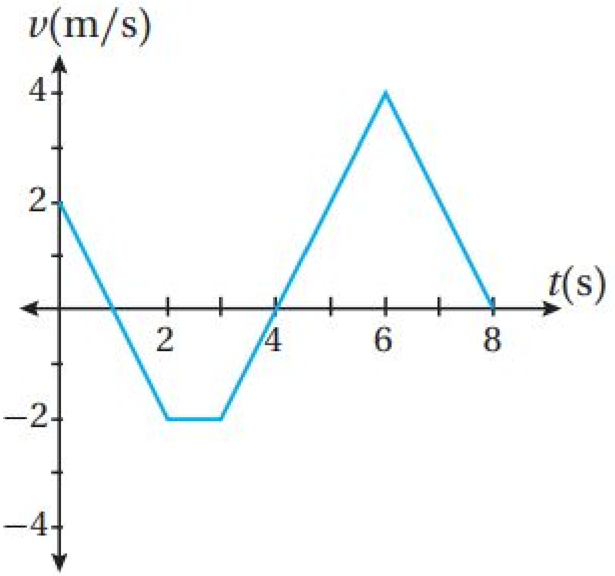
معادلة المستقيم AB:

y−52=−4(x−2)⇒y=212−4x

المساحة المطلوبة هي:

212−4x−(2x−2+x))dx=∫122(212−5x−2x−2)dx=(212x−52x2)122∫
+2x)|122=21−10+1−(214−58+4)=278

يبين الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة - الزمن لجسيم يتحرك على المحور x في الفترة الزمنية [0,8]، إذا بدأ الجسيم الحركة من x=5 عندما t=0، فأجد كلاً مما يأتي:



(14) إزاحة الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

لتكن الإزاحة D

D=s(8)−s(0)=∫08v(t)dt=∫01v(t)dt+∫14v(t)dt+∫48v(t)dt

∫01v(t)dt يساوي مساحة المثلث الأيسر في الرسم البياني وهي:

1=(2)(1)12

∫14v(t)dt يساوي معكوس مساحة شبه المنحرف في الرسم البياني فهو يساوي:

4−=(2)(1+3)12−

∫48v(t)dt يساوي مساحة المثلث الأيمن في الرسم البياني وهي:

8=(4)(4)12

إذن، إزاحة الجسيم هي: s(8)−s(0)=1+(−4)+8=5m

(15) المسافة التي قطعها الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

المسافة التي قطعها الجسيم هي: v(t)|dt|08∫

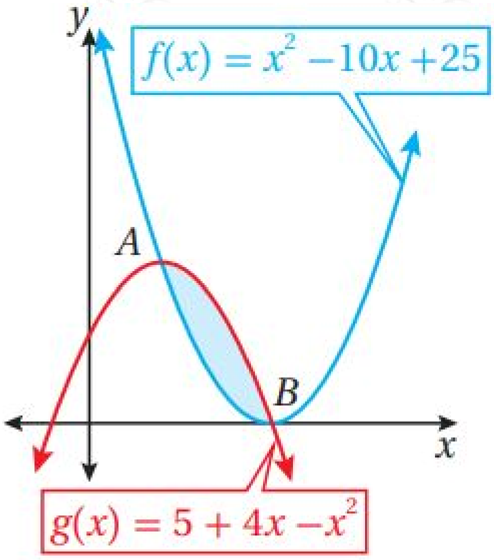
v(t)|dt=∫01|v(t)|dt+∫14|v(t)|dt+∫48|v(t)|dt=1+4+8=13m|08∫

(16) الموقع النهائي للجسيم.

s(8)−s(0)=5

وبتعويض s(0)=5 نجد أن:

s(8)−5=5⇒s(8)=10m



يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: f(x)=x2−10x+25,g(x)=5+4x−x2، معتمداً هذا الشكل، أجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(17) أجد إحداثيي كل من النقطة A، والنقطة B.

f(x)=g(x)⇒x2−10x+25=5+4x−x2⇒2x2−14x+20=0⇒x2−7x+10=0⇒(x−5)(x−2)=0⇒x=5,x=2⇒A(2,9),B(5,0)

(18) أجد حجم المجسّم الناتج من دوران المنطقة المظللة حول المحور x.

V=∫25π((5+4x−x2)2−(x2−10x+25)2)dxV=∫25π(12x3−144x2+540x−600)dx=12π∫25(x3−12x2+45x−50)dx=12π(14x4−4x3+452x2−50x)|25=12π(14(5)4−4(5)3+452(5)2−50(5))−(14(2)4−4(2)3+452(2)2−50(2))=81π

(19) أجد حجم المجسّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

xf(x)=sin في الفترة π,0، والمحور x، حول المحور x.

0)=2ππ−cosx|0π=−π(cosxdx=−πcosV=∫0ππ(f(x))2dx=π∫0πsin

(20) أجد حجم المجسّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: x=g(x)=x3,f(x) حول المحور x.

x3=x⇒x6=x⇒x6−x=0⇒x(x5−1)=0⇒x=0,x=1

لكل x∈(0,1) يكون x>x3

V=∫01π(f2(x)−g2(x))dx=π∫01(x−x6)dx=π(12x2−17x7)|01=π(12−17−0)=5π14

(21) أجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: xf(x)=1+sec، في الفترة (−π2,π2) والمستقيم y=3 حول المحور x.

x=12⇒x=−π3,x=π3x=2⇒cosx=3⇒secsec+1

نلاحظ أن المنحنيين يقعان فوق المحور x وأن x<3f(x)=1+sec في الفترة (−π3,π3)

x+taxsecxtanx+secxdx=∫sec2x+tanxsecx+tanx×secxdx=∫secsec∫x)2)dx=π∫−π3π3(9−(x|+CV=∫−π3π3π(9−(1+secx+tan|secxdx=lnnx|secx)dx=π(8x−2lnx−sec2x))dx=π∫−π3π3(8−2secx+sec21+2sec(2−3)+3))=(2+3)−3)−(−8π3−2lnx)|−π3π3=π((8π3−2lnx|−tan+tan((2−32+3)−23π(16π3+2ln