

أُتدرب وأحل المسائل

المعادلات التفاضلية

أحدد إذا كان الاقتران المعطى حلاً للمعادلة التفاضلية في كل مما يأتي:

$$(y=x; xy' - y = 0) \quad (1)$$

$$y' = 12x; xy' - y = x12x - x = 12x - x = -12x \neq 0$$

إذن، $y=x$ ليس حلاً للمعادلة التفاضلية $xy' - y = 0$

$$(x-5x+7; y'' - 1x = 0) \quad (2) \quad y = x \ln$$

$$x-4y'' = 1x; y'' - 1x = 1x - 1x = 0 \quad x-5 = \ln y' = x(1x) + \ln$$

إذن، $x-5x+7y = x \ln$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y'' - 1x = 0$

$$(x; y' + y^2 = 1) \quad (3) \quad y = \tan$$

$$x \neq 1; x = 1 + 2 \tan^2 x + \tan^2 x; y' + y^2 = \sec^2 y' = \sec^2$$

إذن، $xy = \tan$ ليس حلاً للمعادلة التفاضلية $y' + y^2 = 1$

$$(y = e^x + 3x e^x; y'' - 2y' + y = 0) \quad (4)$$

$$y' = e^x + 3x e^x + 3e^x = 4e^x + 3x e^x; y'' = 4e^x + 3x e^x + 3e^x = 7e^x + 3x e^x; y'' - 2y' + y = 7e^x + 3x e^x - 8e^x - 6x e^x + e^x + 3x e^x = 0$$

إذن، $y = e^x + 3x e^x$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y'' - 2y' + y = 0$

أحل كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(dy/dx = 3xy) \quad (5)$$

$$dy/dx = 3xy; dy = 3x dx \Rightarrow \int dy = \int 3x dx \Rightarrow 2y^2 = 3x^2 + C$$

$$(dy/dx + 3xy^2 = 0) \quad (6)$$

$$dy/dx = -3xy^2 \Rightarrow y^2 dy = -3x dx; \int y^2 dy = \int -3x dx \Rightarrow \frac{1}{3} y^3 = -\frac{3}{2} x^2 + C$$

$$(y (7x \sin y dx = \cos$$

$$y dy = \int \csc x dx \int \csc y dy = \int \cos x dx \Rightarrow \int \csc y = \cos y dx dy \sin x \sin y dx = \cos y dy = - \int -(\csc^2 y + \cot y \csc y \cot y + \csc y dy = \int \csc^2 y + \cot y \csc y + \cot x \csc x + C y = \sin y + \cot |\csc y| \Rightarrow -\ln y + \cot |\csc y dy = -\ln y + \cot y) \csc y \cot y + \csc$$

$$(dy dx = x(x^2 + 1)^2 (8$$

$$dy = x(x^2 + 1)^2 dx \int dy = \int x(x^2 + 1)^2 dx u = x^2 + 1 \Rightarrow dx = du 2x \Rightarrow \int x(x^2 + 1)^2 dx = \int x u^2 du 2x = 1/2 \int 1 u^2 du = -1/2 u + C = -1/2 (x^2 + 1) + C \Rightarrow \int dy = \int x(x^2 + 1)^2 dx \Rightarrow y = -1/2 (x^2 + 1) + C$$

$$(dy dx = x e^x + y (9$$

$$dy dx = x e^x e^y \Rightarrow dy e^y = x e^x dx \int dy e^y = \int x e^x dx \Rightarrow \int e^{-y} dy = \int x e^x dx \Rightarrow -e^{-y} = u = x dv = e^x dx du = dx v = e^x \Rightarrow \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

نستخدم الأجزاء $\int x e^x dx = x e^x - e^x + C \Rightarrow -e^{-y} = x e^x - e^x + C$

$$(e^{-1/x} dy dx = x - 2y^2 (10$$

$$\int dy y^2 = x - 2e^{-1/x} dx = e^{-1/x} x^2 dx \int y - 2 dy = \int e^{-1/x} x^2 dx \Rightarrow -y - 1 = \int e^{-1/x} x^2 dx u = 1/x \Rightarrow du dx = -1/x^2 \Rightarrow dx = -x^2 du \Rightarrow \int e^{-1/x} x^2 dx = \int e^{-u} x^2 (-x^2 du) = - \int e^{-u} du = -e^{-u} + C = -e^{-1/x} + C - y - 1 = \int e^{-1/x} x^2 dx \Rightarrow 1/y = e^{-1/x} + C$$

$$(dy dx = x y x - 3 (11$$

$$|x - 3| + C |y| = x + 3 \ln dy y = x x - 3 dx \int dy y = \int x x - 3 dx \int dy y = \int (1 + 3x - 3) dx \ln$$

$$(y x^3 + 2 (12 dy dx = 3x^2 \sin^2$$

$$y dy = \int 3x^2 x^3 + 2 y = \int 3x^2 (x^3 + 2) dx \int \csc^2 y = 3x^2 (x^3 + 2) dx \int dy \sin^2 dy \sin^2 |x^3 + 2| + C y = \ln x - \cot$$

$$(x (13 dy dx = y^3 \ln$$

$$x dx dv = dx du = dx x v = x \int \ln u = \ln$$

نستخدم الأجزاء $x dx x dx \int dy y^3 = \int \ln dy y^3 = \ln x - x + C x dx \Rightarrow -1/2 y - 2 = x \ln x - x + C \Rightarrow \int y - 3 dy = \int \ln x - \int x dx x = x \ln x = x \ln$

$$(dy/dx = 2x^3(y^2 - 1)) \quad (14)$$

$1/y^2 - 1 = 1/(y-1)$ استخدم التكامل الجزئي $dy/y^2 - 1 = 2x^3 dx$
 $\int dy/y^2 - 1 = \int 2x^3 dx$
 $(y+1) = Ay - 1 + B(y-1)$
 $A(y+1) + B(y-1) = 1$
 $y = 1 \Rightarrow A = 1$
 $y = -1 \Rightarrow B = -1$
 $\Rightarrow 1/y^2 - 1 = 1/y - 1 + (-1)/(y-1)$
 $\Rightarrow \int dy/y^2 - 1 = \int 2x^3 dx \Rightarrow \int (1/y - 1 + (-1)/(y-1)) dy = \int 2x^3 dx$
 $\Rightarrow \ln|y| - y - \ln|y-1| = 1/2 x^4 + C$

$$(x \cos^2 y dy/dx = \sin^3 x) \quad (15)$$

$x \Rightarrow dx = u = \cos x$ استخدم التعويض $x dx \cos^2 x dx = \sin^3 x dy$
 $\int x dx \cos^2 x dx = \int \sin^3 x dy$
 $\int x u^2 du = \int (-1 + \cos x) u^2 du = \int -u^2 du + \int u^2 \cos x dx = -1/3 u^3 + \int u^2 \sin x dx$
 $= -1/3 \cos^3 x + \int \cos^2 x dx = -1/3 \cos^3 x + \int (1 + \cos 2x)/2 dx = -1/3 \cos^3 x + x/2 + \sin 2x/4 + C$
 $\Rightarrow \int x \cos^2 x dx = -1/3 \cos^3 x + x/2 + \sin 2x/4 + C$
 $\Rightarrow \int dy = \int \sin^3 x dx = -\cos x + \sin x \cos x + C$

$$(dy/dx = xy) \quad (16)$$

$$dy/y = x dx \Rightarrow \int dy/y = \int x dx \Rightarrow \ln|y| = x^2/2 + C \Rightarrow y = e^{x^2/2 + C} = e^{x^2/2} \cdot e^C = e^{x^2/2} \cdot C$$

$$(x dy/dx = y \ln x) \quad (17)$$

$x dv = u = \ln x$ استخدم الأجزاء $x dx x^{12} dx = \int 12 \ln x x^{12} dx$
 $\int x dv = \int u dv = uv - \int v du = x \ln x - \int 1/x dx = x \ln x - \ln|x| + C$
 $\Rightarrow \int x^{12} dx = \int 12 \ln x x^{12} dx \Rightarrow \int x^{12} dx = x \ln x - \ln|x| + C$

$$(2x+1)(x+2) dy/dx = -3(y-2) \quad (18)$$

$(2x+1)(x+2) dy = -3(y-2) dx$ استخدم التكامل الجزئي $\int -3 dy/(y-2) = \int dx/(2x+1)(x+2)$
 $\int -3 dy/(y-2) = \int dx/(2x+1)(x+2)$
 $1/(2x+1)(x+2) = A/(2x+1) + B/(x+2)$
 $1 = A(x+2) + B(2x+1)$
 $1 = Ax + 2A + 2Bx + B = (A+2B)x + (2A+B)$
 $A+2B = 0$
 $2A+B = 1$
 $A = -2/3, B = 1/3$
 $\Rightarrow \int -3 dy/(y-2) = \int dx/(2x+1)(x+2) = \int (-2/3)/(2x+1) + (1/3)/(x+2) dx$
 $= -2/3 \ln|2x+1| + 1/3 \ln|x+2| + C = 1/3 \ln|x+2| - 2/3 \ln|2x+1| + C$

أجد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأولي المعطى لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(dy/dx = y^4 - x; y(1) = 2) \quad (19)$$

$$dydx = y^2 4 - x \quad dy y^2 = 4 - x \quad dx \int dy y^2 = \int 4 - x \quad dx \int y - 2 dy = \int (4 - x) 12 dx - 1 y = -23(4 - x)^3 2 + C$$

الخا $1 y = -23(4 - x)^3 2 + 23 - 12 -$ بتعويض $(C \Rightarrow C = 23 - 12)$ $(1, 2 + 23 - = 12 -$
ص الحل

$$(xy; y(0) = 1) \quad (20) \quad dy dx = 2 \sin^2$$

$$2x) dx 12 x dx \int y dy = \int (1 - \cos x) dx \int y dy = \int 2 \sin^2 x y dy = 2 \sin^2 dy dx = 2 \sin^2$$

الحل العام $2x + C y^2 = x - 12 \sin$

الحل الخاص $2x + 12 12 y^2 = x - 12 \sin$ بتعويض $C \Rightarrow C = 12$ $0, 1 + 0 = 12$

$$(y; y(0) = \pi/4) \quad (21) \quad x \cos^2 dy dx = 2 \cos^2$$

$$y dx dx \int \sec^2 y = \int 2 \cos^2 x dx \int dy \cos^2 y = 2 \cos^2 y dy \cos^2 x \cos^2 dy dx = 2 \cos^2$$

الحل العام $2x + C y = x + 12 \sin 2x) dx \tan y = \int (1 + \cos$

الحل الخاص $2x + 1 y = x + 12 \sin C = 1 \tan$ بتعويض $(C(0, \pi/4 + 0 + 0 = 1$

$$(xey; y(\pi) = 0) \quad (22) \quad x e \sin dy dx = \cos$$

$x \Rightarrow du dx u = \sin$ نستخدم التعويض $x dx x e \sin x e y f e y dy = \int \cos x e \sin dy dx = \cos$
 $x = \int e u du = e u + C = x e u x du \cos x dx = \int \cos x e \sin x f \cos x \Rightarrow dx = du \cos = \cos$
بت $e 0 = e 0 + C \pi, 0$ الحل العام $x + C x dx e y = e \sin x e \sin x + C \Rightarrow f e y dy = \int \cos e \sin$
عويض $x C = 0 e y = e \sin \Rightarrow$ الحل

$$(dy dx = 8x - 18(3x - 8)(x - 2); y(3) = 8) \quad (23)$$

الجزئية الكسور $z \quad dy dx = 8x - 18(3x - 8)(x - 2) \int dy = \int 8x - 18(3x - 8)(x - 2) dx$
 $8x - 18(3x - 8)(x - 2) = A 3x - 8 + B x - 2 A(x - 2) + B(3x - 8) = 8x - 18x$ نستخدم
 $= 2 \Rightarrow B = 1 x = 8 \Rightarrow A = 5 \Rightarrow 8x - 18(3x - 8)(x - 2) = 5 3x - 8 + 1 x - 2 \Rightarrow \int dy = \int 8x$
 $|x - 2| |3x - 8| + \ln - 18(3x - 8)(x - 2) dx \Rightarrow y = \int (5 3x - 8 + 1 x - 2) dx \Rightarrow y = 5 3 \ln$
الحل العام $|x - 2| + 8 |3x - 8| + \ln y = 5 3 \ln$ بتعويض $C \Rightarrow C = 8$ $3, 8 + 0 + 0 = 8$

$$(dy dx = 1/x y; y(e) = 1) \quad (24)$$

$C \Rightarrow$ بتعويض $C = 12 - \ln|x| + C$ العام الحل $|x| + C dy dx = 1xy f y dy = \int dx x^{12} y^2 = \ln|x| - 12 - 12 \ln|y| + C$

(25) تتحرك سيارة في مسار مستقيم، ويعطى تسارعها بالمعادلة التفاضلية: $dv/dt = 10 - 0.5v$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعتها المتجهة بالمتري لكل ثانية، أجد السرعة المتجهة للسيارة بعد t ثانية من بدء حركتها، علماً بأن السيارة تحركت من وضع السكون.

$|10 - 0.5v| = t + C \Rightarrow dv/dt = 10 - 0.5v$
 $dv(10 - 0.5v) = dt$
 $\int dv(10 - 0.5v) = \int dt$
 $10 \ln|10 - 0.5v| = t + C$
 $\ln|10 - 0.5v| = -t/10 + C/10$
 $\ln|10 - 0.5v| = -t/10 + C$

إذن، يمكن نمذجة السرعة المتجهة للسيارة بعد t ثانية من بدء حركتها بالعلاقة الآتية:

$$|10 - 0.5v| = -t/10 + C$$



(26) ذئب: يمكن نمذجة معدل تغير عدد الذئب في إحدى الغابات بالمعادلة التفاضلية: $dN/dt = 260 - 0.4N$ ، حيث N عدد الذئب في الغابة بعد t سنة من بدء دراسة عليها. أجد عدد الذئب في الغابة بعد 3 سنوات من بدء الدراسة، علماً بأن عددها عند بدء الدراسة هو 300 ذئب.

$dN/dt = 260 - 0.4N = 0.4(650 - N)$
 $dN(650 - N) = 0.4 dt$
 $\int dN(650 - N) = \int 0.4 dt$
 $650 \ln|650 - N| = 0.4t + C$
 $\ln|650 - N| = 0.4t/650 + C/650$
 $\ln|650 - N| = 0.4t/650 + C$

لا يمكن أن يكون $N = 650$ لأن $\ln 0$ غير معرف ولأن $N = 300$ عندما $t = 0$ والاقتران (N, t) متصل فلا يمكن أن يكون N أكبر من 650، ولذا فإن $N > 0$ ويكون $|N - 650|$ مسار $N - 650$

$(350/650 - N) = \ln$ نعوض $t = 3$ نجد $(350/650 - N) = 0.4t/650 + C$
 $\ln(350/650 - N) = 0.4t/650 + C$
 $1.2 \Rightarrow 350/650 - N = e^{0.4 \cdot 3 / 650} \Rightarrow 650 - N = 350 e^{-0.4 \cdot 3 / 650} \approx 545$

إذن، بعد ثلاث سنوات يكون عدد الذئب في تلك الغابة 545 ذئباً تقريباً.

كرة: تنكم ش كرة، ويتغير نصف قطرها بمعدل يمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية:
 $dr/dt = -0.0075r^2$ ، حيث r طول نصف قطر الكرة بالسنتيمتر، و t الزمن بالثواني
 بعد بدء انكماش الكرة:

(27) أحل المعادلة التفاضلية لإيجاد طول نصف قطر الكرة بعد t ثانية، علماً بأن
 طول نصف الكرة الابتدائي هو 20 cm.

$$dr/dt = -0.0075r^2 \int -dr/r^2 = \int 0.0075 dt \quad 1/r = 0.0075t + C$$

$$+0 = 120 \text{ العام الحل } r = 0.0075t + 120 \Rightarrow r = 20 \text{ عند } t = 0, r = 20$$

(28) بعد كم ثانية يصبح طول نصف قطر الكرة 10 cm؟

نضع $r = 10$ في المعادلة الناتجة:

$$201 + 0.15t \Rightarrow 0.1 = 1 + 0.15t \Rightarrow 2 = 1 + 0.15t \Rightarrow t = 10.15 \approx 6.67 \text{ s} = 10$$

إذن، يكون طول نصف قطر الكرة 10cm بعد 6.67 ثانية تقريباً بعد بدء انكماشها.

حشرات: يتغير عدد الحشرات في مجتمع للحشرات بمعدل يمكن نمذجته بالمعادلة
 التفاضلية: $dn/dt = 0.2n(0.2 - \cos t)$ ، حيث n عدد الحشرات، و t الزمن بالأسابيع بعد
 بدء ملاحظة الحشرات:

(29) أحل المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الحشرات في هذا المجتمع بعد t أسبوعاً،
 علماً بأن عددها الابتدائي هو 400 حشرة.

$$400 = 0 + C \Rightarrow \ln \text{ العام الحل } t) + Cn = 0.2(0.2t - \sin t) dt \quad \ln dn/n = \int 0.2(0.2 - \cos t) dt$$

$$n400 = 0.2(0.400 \Rightarrow \ln t) + \ln n = 0.2(0.2t - \sin t) \text{ نعوض } 400 \text{ عند } t = 0, n = 400 \Rightarrow C = \ln$$

$$\text{ الخاص الحل } (t) \Rightarrow n = 400e^{0.2(0.2t - \sin 2t - \sin t)}$$

(30) أجد عدد الحشرات في هذا المجتمع بعد 3 أسابيع.

نعوض $t = 3$ في المعادلة الأخيرة:

$$3) \approx 400e^{0.12 - 0.028} \approx 400e^{0.092} = 400e^{0.2(0.6 - \sin 3)} = 400e^{0.2(0.2t - \sin t)}$$

$$0.092 \approx 439$$

إذن، بعد 3 أسابيع يكون عدد الحشرات 439 حشرة تقريباً.

(31) تمثل المعادلة التفاضلية: $x dy dx = y \cos$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما، أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أن منحنىها يمر بالنقطة $(0,1)$.

$$C \Rightarrow C=0 \quad y=+0=0 \quad \text{الحل العام} \quad x+C|y| = \sin x dx \Rightarrow \ln x \int dy y = \int \cos dy dx = y \cos$$

$$xx \Rightarrow y = e \sin |y| = \sin \ln \Rightarrow \text{نعوض } 1, x=0$$

ملاحظة: منحنى الاقتران $xy = -e \sin$ لا يمر بالنقطة $(0,1)$.

(32) تمثل المعادلة التفاضلية: $x(x+1) dy dx = y$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما، أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أن منحنىها يمر بالنقطة $(1,3)$.

$$1x(x+1) = Ax + Bx + 1A(x+1) + B(x) \quad \text{نستخدم الكسور الجزئية}$$

$$dy y = \int dx x(x+1) = \int dx (Ax + Bx + 1)$$

$$1x(x+1) = 1x = 0 \Rightarrow A = 1x = -1 \Rightarrow B = -1 \Rightarrow 1x(x+1) = 1x + -1x + 1 \Rightarrow \int dy y = \int dx x(x+1)$$

$$23 = 0 - \ln \ln \quad \text{الحل العام} \quad |x+1| + C|x| - \ln|y| = \ln|y| = \int (1x + -1x + 1) dx \Rightarrow \ln \Rightarrow \ln$$

$$|y| 6 \Rightarrow \ln|x+1| + \ln|x| - \ln|y| = \ln \ln \Rightarrow \text{نعوض } 6 \quad y=3, x=12 = \ln 3 + \ln + C \Rightarrow C = \ln$$

$$|6xx+1| \Rightarrow |y| = |6xx+1| \Rightarrow y = 6xx+1 = \ln$$

ملاحظة: منحنى الاقتران $y = -6xx+1$ لا يمر بالنقطة $(1,3)$