

أتحقّق من فهمي

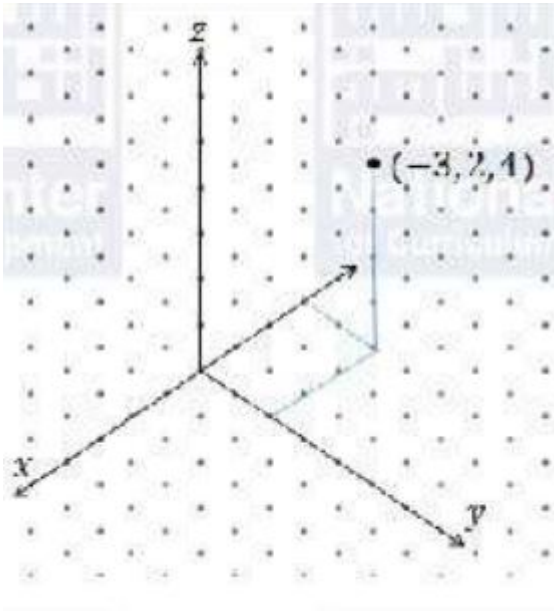
المتجهات في الفضاء

نظام الأحداثيات ثلاثي الأبعاد

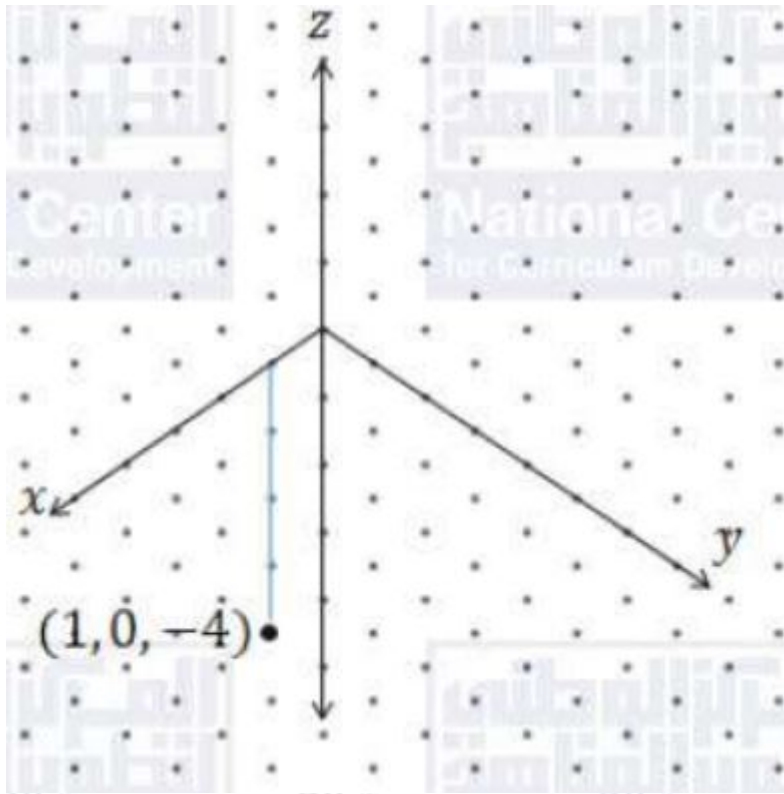
أتحقّق من فهمي صفحة (111):

أعين كلاً من النقاط الآتية في نظام الأحداثيات ثلاثي الأبعاد:

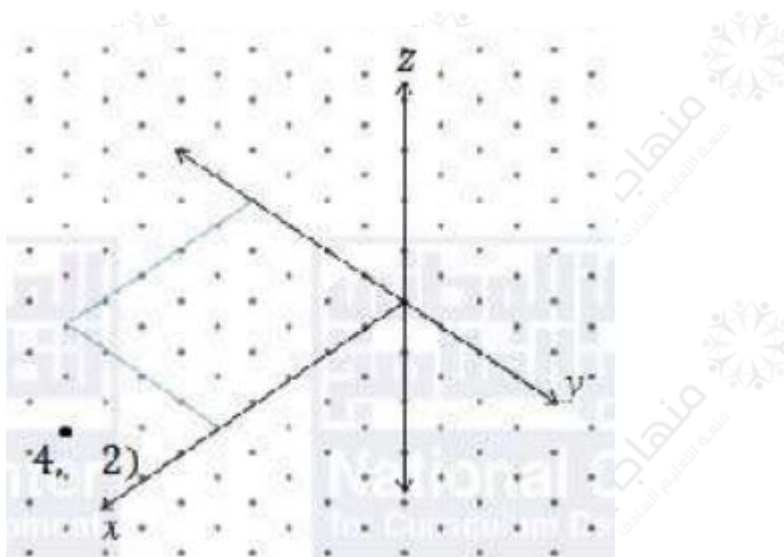
(a) $(3, 2, 4)$



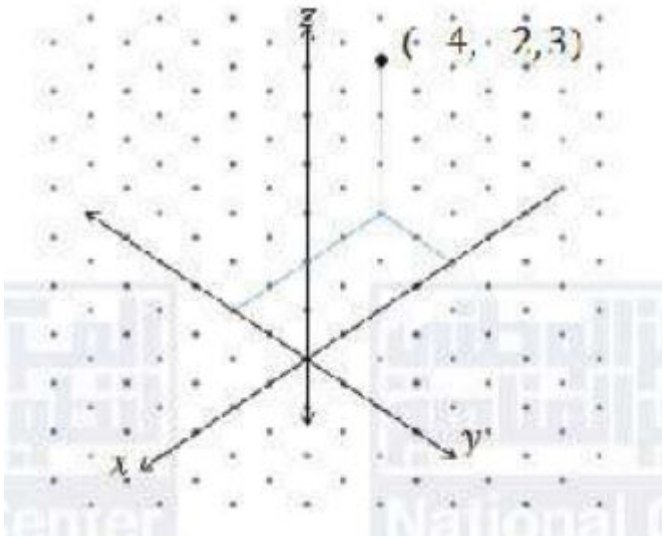
(b) $(4, -1, 0)$



(c) $(2, -4, -5)$



(d) $(2, 3, -4)$



المسافة بين نقطتين، وإحداثيات نقطة المنتصف في الفضاء

أتحقق من فهمي صفحة (113):

إذا كانت: $M(5, -3, 6)$, $N(2, 1, -6)$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

(a) المسافة بين M و N .

$$MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(5 - 2)^2 + (-3 - 1)^2 + (6 - (-6))^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

(b) إحداثيات نقطة منتصف MN .

لتكن K منتصف القطعة المستقيمة MN ، فتكون:

$$K = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right) = \left(\frac{2 + 5}{2}, \frac{1 - 3}{2}, \frac{-6 + 6}{2} \right) = (7/2, -1, 0)$$

مقدار المتجه في الفضاء

أتحقق من فهمي صفحة (114):

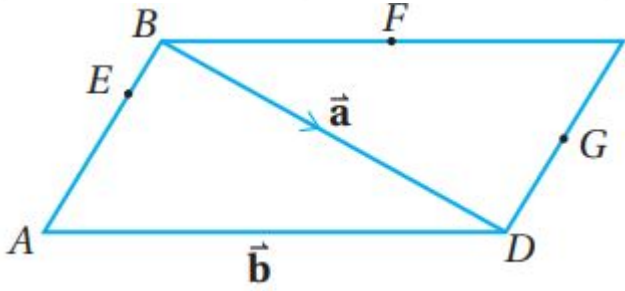
إذا كان: $A(-1, 5, 3)$, $B(-5, 3, -2)$ ، فأكتب المتجه \vec{AB} بالصورة الإحداثية، ثم أجد مقداره.

$$\vec{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle = \langle -5 - (-1), 3 - 5, -2 - 3 \rangle = \langle -4, -2, -5 \rangle$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{16 + 4 + 25} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي هندسياً

أتحقق من فهمي صفحة (116):



إذا في متوازي الأضلاع ABCD المجاور، كانت F نقطة منتصف BC، و G نقطة منتصف DC، وكانت: $\vec{BD} = \vec{a}$ ، وكانت: $\vec{AD} = \vec{b}$ ، وكانت: $AE = 3EB$ ، فاكتب كلاً مما يأتي بدلالة \vec{a} و \vec{b} :

(AB →) (a

$$\vec{AB} = \vec{AD} + \vec{DB} = \vec{b} + (-\vec{a}) = \vec{b} - \vec{a}$$

(EB →) (b

$$\vec{AB} = \vec{AE} + \vec{EB} = 3\vec{EB} + \vec{EB} = 4\vec{EB} \Rightarrow \vec{EB} = \frac{1}{4}\vec{AB} \Rightarrow \vec{EB} = \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a}$$

(EF →) (c

$$\vec{EF} = \vec{EB} + \vec{BF} = \vec{EB} + \frac{1}{2}\vec{BC}$$

وذلك لأن $\vec{BC} = \vec{AD}$ كون الشكل متوازي الأضلاع $\vec{EF} = \vec{EB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$

$$\vec{EF} = \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a}$$

جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي جبرياً

أتحقق من فهمي صفحة (117):

إذا كان: $\vec{u} = \langle 4, 5, -3 \rangle$, $\vec{v} = \langle 3, 0, -5 \rangle$, $\vec{w} = \langle 9, -2, -5 \rangle$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

(3 \vec{v} - 4 \vec{u}) (a

$$3\vec{v} - 4\vec{u} = 3\langle 3, 0, -5 \rangle - 4\langle 4, 5, -3 \rangle = \langle 9, 0, -15 \rangle - \langle 16, 20, -12 \rangle = \langle -7, -20, -3 \rangle$$

(3 \vec{u} + 5 \vec{v} - 2 \vec{w}) (b

$$\langle 3\mathbf{u} + 5\mathbf{v} - 2\mathbf{w} \rangle = 3\langle 4, 5, -3 \rangle + 5\langle 3, 0, -5 \rangle - 2\langle 9, -2, -5 \rangle = \langle 12, 15, -9 \rangle + \langle 15, 0, -25 \rangle + \langle -18, 4, 10 \rangle = \langle 9, 19, -24 \rangle$$

تساوي المتجهات

أتحقق من فهمي صفحة (117):

إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 20, 2p - 5, -12 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3q + 8, 0, 3r \rangle$ ، وكان: $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ ، فأجد قيمة كل من r, q, p .

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \Rightarrow 20 = 3q + 8, 2p - 5 = 0, -12 = 3r \Rightarrow q = 4, p = 5, r = -4$$

متجه الموقع والإزاحة

أتحقق من فهمي صفحة (119):

إذا كانت: $A(-2, 8, 13), B(5, -7, -9), C(0, 1, -14)$ نقاطاً في الفضاء، فأجد كلاً مما يأتي:

(a) متجه موقع كل من النقاط: A و B و C.

$$\langle \mathbf{OA} \rangle = \langle -2, 8, 13 \rangle, \langle \mathbf{OB} \rangle = \langle 5, -7, -9 \rangle, \langle \mathbf{OC} \rangle = \langle 0, 1, -14 \rangle$$

(b) متجه الإزاحة من النقطة B إلى النقطة C.

$$\langle \mathbf{BC} \rangle = \langle \mathbf{OC} \rangle - \langle \mathbf{OB} \rangle = \langle -5, 8, -5 \rangle$$

(c) المسافة بين النقطة A والنقطة C.

$$AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (1 - 8)^2 + (-14 - 13)^2} = \sqrt{4 + 49 + 729} = 782$$

كتابة المتجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

أتحقق من فهمي صفحة (121):

اكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة متجهات الوحدة الأساسية:

(a) $\langle \mathbf{g} \rangle = \langle 9, 0, -4 \rangle$

$$\vec{g} = 9\vec{i} - 4\vec{k}$$

$$(\vec{AB} \rightarrow : A(2, -1, 4), B(7, 6, -2)) \quad (b)$$

$$\vec{AB} \rightarrow = (7-2, 6-(-1), -2-4) = (5, 7, -6) = 5\vec{i} + 7\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$(4\vec{m} \rightarrow - 5\vec{f} \rightarrow : \vec{m} \rightarrow = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}, \vec{f} \rightarrow = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}) \quad (c)$$

$$4\vec{m} \rightarrow - 5\vec{f} \rightarrow = 4(-2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}) - 5(3\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}) = (-8 - 15)\vec{i} + (12 + 25)\vec{j} + (-16 - 30)\vec{k} = -23\vec{i} + 37\vec{j} - 46\vec{k}$$

إيجاد متجه وحدة في اتجاه أي متجه

أتحقق من فهمي صفحة (122):

أجد متجه وحدة في اتجاه كل متجه مما يأتي:

$$(\vec{u} \rightarrow = \langle 4, -3, 5 \rangle) \quad (a)$$

$$|\vec{u} \rightarrow| = \sqrt{16+9+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \quad \hat{u} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \vec{u} \rightarrow = \langle \frac{4}{5\sqrt{2}}, -\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{5}{5\sqrt{2}} \rangle = \langle \frac{2\sqrt{2}}{5}, -\frac{3\sqrt{2}}{5}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$$

وهذا متجه وحدة في \vec{u}

$$(\vec{v} \rightarrow = 8\vec{i} + 15\vec{j} - 17\vec{k}) \quad (b)$$

$$|\vec{v} \rightarrow| = \sqrt{64+225+289} = \sqrt{578} = 17\sqrt{2} \quad \hat{v} = \frac{1}{17\sqrt{2}} \vec{v} \rightarrow = \langle \frac{8}{17\sqrt{2}}, \frac{15}{17\sqrt{2}}, -\frac{17}{17\sqrt{2}} \rangle = \langle \frac{4\sqrt{2}}{17}, \frac{15\sqrt{2}}{17}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$$

وهذا متجه وحدة في \vec{v}

$$(\vec{AB} \rightarrow : A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8)) \quad (c)$$

$$\vec{AB} \rightarrow = (3-(-1), 3-4, 8-6) = (4, -1, 2) \quad |\vec{AB} \rightarrow| = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$$

ليكن \hat{u} متجه وحدة في اتجاه $\vec{AB} \rightarrow$ ، فيكون:

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{21}} \vec{AB} \rightarrow = \langle \frac{4}{\sqrt{21}}, -\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}} \rangle$$