أتحقق من فهمي

المستقيمات في الفضاء

توازي المتجهات

أتحقق من فهمي صفحة (127):

إذا كان: $G(7,5,-11), H(4,4,-4), K(4,5,3), L(7,7,3)$، فأحدد إن كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أم لا:

a) $\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{KL}$

$\overrightarrow{GH} = \langle -3,-1,7 \rangle$ $\overrightarrow{KL} = \langle 3,2,0 \rangle$

نلاحظ أنه لا يوجد عدد حقيقي c يجعل العبارة $\overrightarrow{GH} = c\overrightarrow{KL}$ صحيحة، ونستنتج أن $\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{KL}$ غير متوازيين.

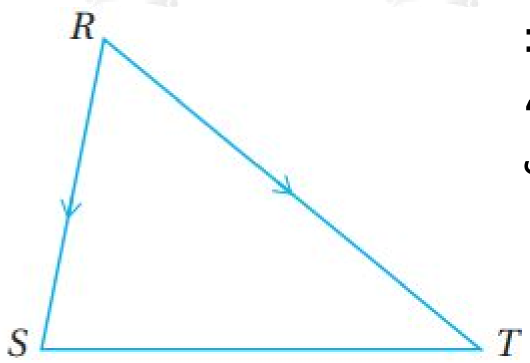
b) $\overrightarrow{GL}, \overrightarrow{HK}$

$\overrightarrow{GL} = \langle 0,2,14 \rangle$ $\overrightarrow{HK} = \langle 0,1,7 \rangle$

نلاحظ أن $\overrightarrow{GL} = 2\overrightarrow{HK}$، ونستنتج أن $\overrightarrow{GL} \parallel \overrightarrow{HK}$

أتحقق من فهمي صفحة (129):

في المثلث RST المجاور، إذا كان: $\overrightarrow{RS} = 4\vec{a}, \overrightarrow{RT} = 6\vec{b}$ والنقطة U منتصف $\overline{RS}$، والنقطة V منتصف $\overline{RT}$، فأثبت أن $\overrightarrow{ST}$ يوازي $\overrightarrow{UV}$.



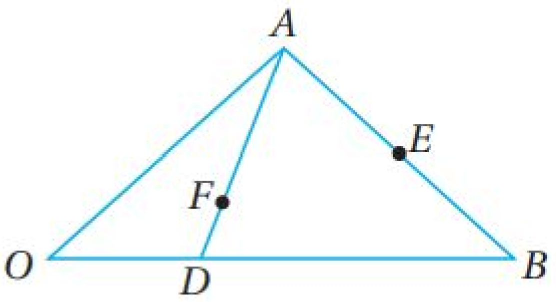
$\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{UR} + \overrightarrow{RV} = \frac{1}{2}(-4\vec{a}) + \frac{1}{2}(6\vec{b}) = 3\vec{b} - 2\vec{a}$

$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RT} = -4\vec{a} + 6\vec{b} = 2(3\vec{b} - 2\vec{a})$

إذن، $\overrightarrow{ST} = 2\overrightarrow{UV}$، ومنه المتجهان $\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{UV}$ متوازيان.

أتحقق من فهمي صفحة (130):

يظهر في الشكل المجاور المثلث OAB.



إذا كان: OA→=a→,OB→=b، وكانت النقطة D تقع على ‾OB ، والنقطة E منتصف ‾AB ، والنقطة F تقع على ‾AD ، حيث: OF→=25(a→+b)، فأثبت أن O، وF، وE تقع على استقامة واحدة.

OF→=25(a→+b→)⟹a→+b→=52OF→.................(1)OE→=OB→+BE→ =b→+12BA→=b→+12(BO→+OA→)=b→+12(−b→+a→)=12(a→+b→) ⇒a→+b→=2OE→.................2

من العلاقتين (1) و(2) نستنتج أن:

→52OF→=2OE→⇒OF→=45OE

وهذا يعني أن المتجهين OF→,OE→ متوازيان، وبما أنهما ينطلقان من النقطة O نفسها، إذن النقاط O,E,F تقع على استقامة واحدة.

المعادلة المتجهة للمستقيم

أتحقق من فهمي صفحة (132):

أجد معادلة متجهة للمستقيم l الذي يوازي المتجه: v→=⟨1,−4,−5⟩، ويمر بالنقطة U(0,−6,9).

r→=r→0+tv→r→=⟨0,−6,9⟩+t⟨1,−4,−5⟩

أتحقق من فهمي صفحة (133):

أجد معادلة متجهة للمستقيم l المار بالنقطتين: M(3,7,−9)، وN(2,−4,3).

NM→=⟨3−2,7−(−4),−9−3⟩=⟨1,11,−12⟩r→=r→0+tv→⇒r→=⟨3,7,−9⟩+⟨t⟨1,11,−12

أتحقق من فهمي صفحة (136):

تمثل: ^r→=11i^+5j^−6k^+t(7i^−2j^+5k) معادلة متجهة للمستقيم l:

(a) أبين أن النقطة التي متجه الموقع لها هو (^39i^−3j^+14k) تقع على المستقيم l.

^r→=(11+7t)i^+(5−2t)ȷ^+(−6+5t)k

نبحث عن قيمة ل t تحقق:

39i^−3ȷ^+14k^=(11+7t)i^+(5−2t)ȷ^+(−6+5t)k^39=11+7t⇒t=4−3=5−2t⇒t=414=−6+5t⇒t=4

بما أن للمعادلات الثلاث الحل نفسه (t=4)، فإن القطة التي متجه موقعها ^39i^−3ȷ^+14k وهي النقطة (39,−3,14) تقع على المستقيم l لأنها تنتج من تعويض t=4 في معادلته.

(b) أجد متجه الموقع للنقطة التي تقع على هذا المستقيم، وتقابل القيمة: t =-3.

t=−3⇒r→=(11+7(−3))i^+(5−2(−3))ȷ^+(−6+5(−3))k^=−10i^+11ȷ^^−21k

(c) إذا كانت النقطة (v,−3v,5v−1) تقع على المستقيم l، فما قيمة v؟

متجه الموقع للنقطة ^v,−3v,5v−1)2)ه^vı^−3vȷ^+(5v−1)k

vi^−3vȷ^+(5v−1)k^=(11+7t)1^+(5−2t)ȷ^+(−6+5t)k^v=11+7t.........(1)−3v=5−2t.........(2)5v−1=−6+5t......(3)(1)×3+(2)⇒0=38+19t⇒t=−2⇒v=−3

تتحقق من أن v=−3,t=−2 تحققان المعادلة (3)

16−=16−(2−)6+5−=1−(3−)5

إذن، قيمة v التي تجعل النقطة (v,−3v,5v−1) واقعة على المستقيم l هي: v=−3

المستقيمات المتوازية والمتقاطعة والمتخالفة

أتحقق من فهمي صفحة (136):

إذا كانت: $\vec{r}=\langle 3,7,-9\rangle+t\langle 1,11,-12\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l1، وكانت: $\vec{r}=\langle -30,-6,30\rangle+u\langle 4,-6,3\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l2، ، فأحدد إذا كان المستقيمان: l2,l1 متوازيين، أو متقاطعين، أو متخالفين، ثم أجد إحداثيات نقطة تقاطعهما إذا كانا متقاطعين.

اتجاه المستقيم l1 هو $\vec{v}_1=\langle 1,11,-12\rangle$

اتجاه المستقيم l2 هو $\vec{v}_2=\langle 4,-6,3\rangle$

وبما أنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\vec{v}_1=k\vec{v}_2$ فإن المستقيمين غير متوازيين.

نساوي $\vec{r}$ من معادلتي المستقيمين:

$\langle 3,7,-9\rangle+t\langle 1,11,-12\rangle=\langle -30,-6,30\rangle+u\langle 4,-6,3\rangle$
$3+t=-30+4u \Rightarrow t-4u=-33 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$
$7+11t=-6-6u \Rightarrow 11t+6u=-13 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$
$-9-12t=30+3u \Rightarrow 12t+3u=-39 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$
$3\times(1)+2\times(2) \Rightarrow 25t=-125 \Rightarrow t=-5,\ u=7$

نتحقق من أن $u=7, t=-5$ تحققان المعادلة (3)

$12(-5)+3(7)\overset{?}{=}-39$
$-39=-39$

بما أن قيمة t وقيمة u حققتا المعادلات الثلاث، فإن المستقيمين متقاطعان.

لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض $t=-5$ في معادلة l1:

$\vec{r}=\langle 3,7,-9\rangle-5\langle 1,11,-12\rangle=\langle -2,-48,51\rangle$

إذن، يتقاطع المستقيمان في النقطة $(-2,-48,51)$

أتحقق من فهمي صفحة (138):

عرض جوي: أقلعت طائرة من موقع إحداثياته: (0,7,0). وفي الوقت نفسه، أقلعت

طائرة ثانية من موقع إحداثياته: $(-2,0,0)$. وبعد التحليق مدة قصيرة في مسارين مستقيمين، أصبحت الطائرة الأولى عند الموقع الذي إحداثياته: $(8,15,16)$، وأصبحت الطائرة الثانية عند الموقع الذي إحداثياته: $(22,24,48)$. هل خطا سير الطائرتين متوازيان، أم متقاطعان، أم متخالفان؟

اتجاه الطائرة الأولى هو اتجاه الطائرة الأولى هو
$\vec{v}_1=\langle 8-0,15-7,16-0\rangle=\langle 8,8,16\rangle$

ويمكن تبسيطه بالقسسة على 8 ليصبح: $\langle 1,1,2\rangle$

معادلة مسار الأولى: $\vec{r}=\langle 0,7,0\rangle+t\langle 1,1,2\rangle$

اتجاه الثانية هو $\vec{v}_2=\langle 22-(-2),24-0,48-0\rangle=\langle 24,24,48\rangle$

ويمكن تبسيطه بالقسمة على 24 دون تغيير اتجاهه ليصبح: $\langle 1,1,2\rangle$

معادلة مسار الثانية: $\vec{r}=\langle -2,0,0\rangle+u\langle 1,1,2\rangle$

نلاحظ أن المسارين متوازيان لأن لهما الاتجاه نفسه.