أتدرب وأحل المسائل

المتجهات في الفضاء

أحدد إذا كان المتجهان متوازيين أم لا في كل مما يأتي:

(1) ⟨20−,15,10⟩,⟨8,12,24⟩

نلاحظ عدم وجود عدد حقيقي k بحيث ⟨20−,15,10⟩=k⟨8,12,24⟩

إذن، المتجهان غير متوازيين.

(2) ⟨12−,16−,9⟩,⟨36−,48−,27⟩

نلاحظ أن ⟨36−,48−,27⟩=3⟨12−,16−,9⟩

إذن، المتجهان متوازيان.

(3) ⟨1,13−,3−⟩,⟨4,10−,6−⟩

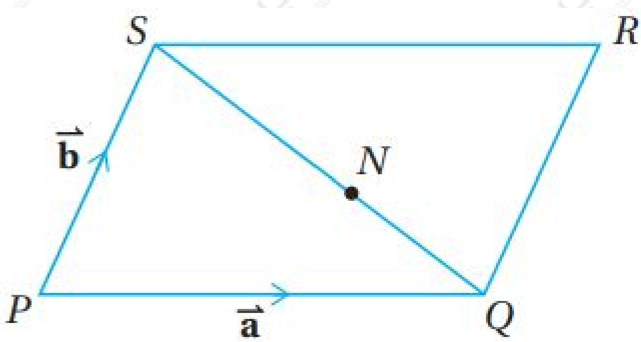
نلاحظ عدم وجود عدد حقيقي k بحيث ⟨4,10−,6−⟩=k⟨−3,−1,13⟩

إذن، المتجهان غير متوازيين.

(4) ⟨14,56−,21⟩,⟨8,32−,12⟩

نلاحظ أن ⟨8,32−,12⟩=47⟨14,56−,21⟩

إذن، المتجهان متوازيان.



يمثل الشكل المجاور متوازي الأضلاع PQRS، الذي تقع فيه النقطة N على SQ¯، حيث: PQ→=a→,PS→=b→,،SN:NQ=3:2:

(5) أكتب SQ→ بدلالة a→,b→.

→SQ→=SP→+PQ→=−b→+a→=a→−b

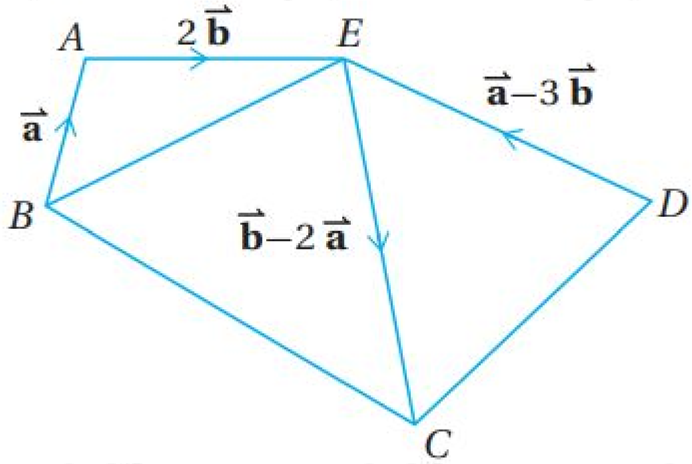
(6) أكتب →NR بدلالة →b→,a.

NQSN=23⇒NQ=23SN⇒SQ=SN+NQ=SN+23SN=53SN⇒SQ=53SN⇒SN=35SQ⇒NQ=25SQ

وبما أن الشكل متوازي أضلاع فإن: →QR→=PS→=b

→NR→=NQ→+QR→=25SQ→+QR→=25(a→−b→)+b→=25a→+35b

(7) معتمداً المعلومات المعطاة في الشكل المجاور، أثبت أن BEDC متوازي أضلاع.

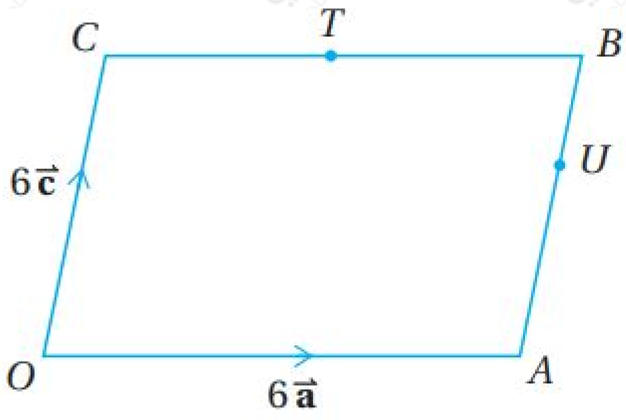


BE→=BA→+AE→=a→+2b→...............(1)CD→=CE→+ED→=−(b→−2a→→)−(a→−3b→)=a→+2b→.........2⇒BE→=CD

إذن، الضلعان ¯CD¯,,BE متوازيين ولهما الطول نفسه، وهذا يعني أن الشكل BEDC متوازي أضلاع.

ويمكن إثبات المطلوب بطريقة أخرى بإيجاد المتجهين →BC→,ED وبيان تساويهما.

(8) في متوازي الأضلاع OABC المجاور، →OA→=6a→,OC→=6c والنقطة T هي منتصف الضلع ¯CB، والنقطة U نقسم ¯AB بنسبة 2:1، إذا مد الضلع ¯OA على استقامته إلى النقطة X، حيث: OA=AX، فأثبت أن T، وU، وX تقع على استقامة واحدة.



$XT\to=XO\to+OT\to=XO\to+(OC\to+CT\to)=-12a\to+(6c\to+3a\to)=6c\to-9a\to=3(2c\to-3a\to)\Rightarrow 2c\to-3a\to=13XT\to XU\to=XA\to+AU\to=XA\to+23AB\to=-6a\to+23(6c\to)=4c\to-6a\to=2(2c\to-3a\to)=2(13XT\to)\Rightarrow XU\to=23XT\to$

إذن، $XT,XU\to\to$ متوازيان، وبما أنهما منطلقان من النقطة نفسها X، فإن النقاط T,U,X تقع على استقامة واحدة.

أجد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه $a\to$، ويمر بنقطة متجه الموقع لها $b\to$ في كل مما يأتي:

9) $a\to=-7i^\wedge+j^\wedge, b\to=5i^\wedge+3j^\wedge$

$r\to=b\to+ta\to\Rightarrow r\to=5i^\wedge+3j^\wedge+t(-7i^\wedge+j^\wedge)$

10) $a\to=-3i^\wedge+2j^\wedge-k^\wedge, b\to=-2i^\wedge+8k^\wedge$

$r\to=b\to+ta\to\Rightarrow r\to=-2i^\wedge+8k^\wedge+t(-3i^\wedge+2j^\wedge-k^\wedge)$

11) $a\to=\langle 4,3\rangle, b\to=\langle 9,-2\rangle$

$r\to=b\to+ta\to\Rightarrow r\to=\langle 9,-2\rangle+t\langle 4,3\rangle$

12) $a\to=\langle 0,-1,3\rangle, b\to=\langle 10,3,-6\rangle$

$r\to=b\to+ta\to\Longrightarrow r\to=\langle 10,3,-6\rangle+t\langle 0,-1,3\rangle$

أجد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي:

(13) (1,3−,0),(6−,10,3)

اتجاه المستقيم: $v\to=\langle 10-0,3-(-1),-6-3\rangle=\langle 10,4,-9\rangle$

معادلة المستقيم: $r\to=\langle 0,-1,3\rangle+t\langle 10,4,-9\rangle$

(14) (1,4,29),(6,9−,11)

اتجاه المستقيم: $v\to=\langle 11-1,-6-4,9-29\rangle=\langle 10,-10,-20\rangle$

ويمكن تبسيطه بالقسمة على 10 دون التأثير على اتجاهه: ⟨1,−1,−2⟩=⟨v→

معادلة المستقيم: ⟨1,4,29⟩+t⟨1,−1,−2⟩=⟨r→

(15) (12,23−,26−),(6,30−,30−)

اتجاه المستقيم: ⟨−30−(−26),−6−(−12),30−23⟩=⟨−4,6,7⟩=⟨v→

معادلة المستقيم: ⟨−26,−12,23⟩+t⟨−4,6,7⟩=⟨r→

(16) (7−,10,5),(2,9,1−)

اتجاه المستقيم: ⟨−2−10,9−5,1−(−7)⟩=⟨−12,4,8⟩=⟨v→

ويمكن تبسيطه بقسمته على 4 إلى ⟨−3,1,2⟩

معادلة المستقيم: ⟨10,5,−7⟩+t⟨−3,1,2⟩=⟨r→

(17) أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين:

⟨r→=⟨4,4,−7⟩+u⟨−1,3,1⟩,،r→=⟨−2,2,−1⟩+t⟨1,2,−1

نساوي r→ في معادلتي المستقيمين:

t⟨1,2,−1⟩=⟨4,4,−7⟩+u⟨−1,3,1⟩−2+t=4−u⇒t+u=6.........+⟨1−,2,2−⟩ ......(1)2+2t=4+3u⇒2t−3u=2............(2)−1−t=−7+u⇒t+u=6......... ......(3)3×(1)+(2)⇒5t=20⇒t=4,u=2

نلاحظ أن المعادلة (3) هي المعادلة (1) نفسها فهي متحققة لقيمتي t=4,u=2

لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض t=4 في معادلة المستقيم الأول (أو u=2 في معادلة الثاني):

⟨r→=⟨−2,2,−1⟩+4⟨1,2,−1⟩=⟨2,10,−5

إذن، نقطة تقاطع المستقيمين هي: (5−,2,10)

يمر المستقيم l1 بالنقطتين: E ، وF، ويمر المستقيم l2 بالنقطتين: G، وH. أحدد إذا كان هذان المستقيمان متوازيين، أو متخالفين، أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة

التقاطع إذا كانا متقاطعين في كل مما يأتي:

18) $E(3,-5,-7), F(-11,9,14), G(8,-1,-8), H(2,5,1)$

$\overrightarrow{EF}=\langle -14,14,21\rangle \Rightarrow \vec{v}_1=\langle -2,2,3\rangle$ $\overrightarrow{GH}=\langle -6,6,9\rangle \Rightarrow \vec{v}_2=\langle -2,2,3\rangle$

نلاحظ أن $\vec{v}_1=\vec{v}_2$ فالمتجهان وكذلك المستقيمان متوازيان.

19) $E(3,7,-9), F(2,-4,3), G(-30,-6,30), H(-26,-12,33)$

$\overrightarrow{EF}=\langle -1,-11,12\rangle=\vec{v}_1$ $\overrightarrow{HG}=\langle 21,35,-49\rangle \Rightarrow \vec{v}_2=\langle 3,5,-7\rangle$

وبما أنه لا يوجد عدد حقيقي k يحقق $\vec{v}_1=k\vec{v}_2$ فالمتجهان وكذلك المستقيمان متوازيان.

معادلة $\overleftrightarrow{EF}$: $\vec{r}=\langle 3,7,-9\rangle+t\langle -1,-11,12\rangle$

معادلة $\overleftrightarrow{GH}$: $\vec{r}=\langle 3,-21,20\rangle+u\langle 3,5,-7\rangle$

نساوي $\vec{r}$ في معادلتي المستقيمين ونساوي الإحداثيات المتناظرة:

$\langle 3,7,-9\rangle+t\langle -1,-11,12\rangle=\langle 3,-21,20\rangle+u\langle 3,5,-7\rangle$
$3-t=3+3u \Rightarrow t+3u=0$
$7-11t=-21+5u \Rightarrow 11t+5u=28 ....(1)$
$-9+12t=20-7u \Rightarrow 12t+7u=29 .....(3)$
$-5\times(1)+3\times(2) \Rightarrow 28t=84 \Rightarrow t=3, u=-1$

نفحص تحقق المعادلة (3) عندما $t=3, u=-1$

$12(3)+7(-1)=29$
$29=29$

فالمستقيمان متقاطعان، نجد نقطة التقاطع بتعويض $t=3$ في معادلة $\overleftrightarrow{EF}$ (أو $u=-1$ في معادلة $\overleftrightarrow{GH}$):

$\vec{r}=\langle 3,7,-9\rangle+3\langle -1,-11,12\rangle=\langle 0,-26,27\rangle$

إذن، نقطة تقاطع المستقيمين هي: $(0,-26,27)$

يمر المستقيم l بالنقطتين: $A(-2,9,1), B(10,5,-7)$

20) أكتب معادلة متجهة للمستقيم l.

$\overrightarrow{AB}=\langle 12,-4,-8\rangle \Rightarrow \vec{v}=\langle 3,-1,-2\rangle$

معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$: $\vec{r}=\langle -2,9,1\rangle+t\langle 3,-1,-2\rangle$

(21) أبين أن النقطة $(19,2,-13)$ تقع على المستقيم l.

متجه الموقع للنقطة $(19,2,-13)$ هو: $\langle 19,2,-13\rangle$

$\langle -2+3t,9-t,1-2t\rangle=\langle 19,2,-13\rangle \Rightarrow 19=-2+3t \Rightarrow t=7$ $2=9-t \Rightarrow t=7$ $-13=1-2t \Rightarrow t=7$

بما أن للمعادلات الثلاث الحل نفسه $(t=7)$ فإن النقطة $(19,2,-13)$ تقع على المستقيم l لأنها تنتج من تعويض $t=7$ في معادلته.

(22) أجد قيمة a إذا كانت النقطة $(a,-1,1)$ تقع على المستقيم l.

بما أن النقطة $(a,-1,1)$ تقع على المستقيم l فإنها تحقق معادلته، أي أن:

$\langle a,-1,1\rangle=\langle -2+3t,9-t,1-2t\rangle \Rightarrow 1=-2+3t \Rightarrow t=1$ $a=9-t=9-1 \Rightarrow a=8$

(23) أجد قيمة كل من b، وc إذا كانت النقطة $(-8,b,c)$ تقع على المستقيم l.

بما أن النقطة $(-8,b,c)$ تقع على المستقيم l فإنها تحقق معادلته، أي أن:

$\langle -8,b,c\rangle=\langle -2+3t,9-t,1-2t\rangle \Rightarrow -2+3t=-8 \Rightarrow t=-2$ $b=9-t=9-(-2) \Rightarrow b=11$ $c=1-2t=1-2(-2) \Rightarrow c=5$

(24) أجد نقطة تقع على المستقيم l، وتقع أيضا في المستوى xz.

بما أن النقطة المطلوبة تقع في المستوي xz فإن الإحداثي y لها يساوي صفراً

$\langle x,0,z\rangle=\langle -2+3t,9-t,1-2t\rangle$ $9-t=0 \Rightarrow t=9$ $x=-2+3t=-2+3(9) \Rightarrow x=25$ $z=1-2t=1-2(9) \Rightarrow z=-17$

إذن، النقطة المطلوبة هي: $(25,0,-17)$

(25) إذا كان $\vec{m}=\langle 1,-2,3\rangle, \vec{n}=\langle -5,4,a\rangle$، وكان المتجه: $b\vec{m}+3\vec{n}$ يوازي المتجه: $\langle 3,-5,3\rangle$، فأجد قيمة كل من a، وb.

⟨3n→+bm→=⟨−15,12,3a⟩+⟨b,−2b,3b⟩=⟨−15+b,12−2b,3a+3b

وبما أن هذا المتجه يوازي المتجه ⟨3,5−,3⟩ فإن:

b,12−2b,3a+3b⟩=k⟨3,−3,5⟩⇒−15+b=3k....(1)12−2b=−3k...+15−⟩
....(2)3a+3b=5k.........(3)(1)×2+(2)⇒−18=3k⇒k=−6,b=−3,a=−7

(26) إذا كان v→=a(3−56)+b(14c)، فأجد قيمة كل من a، وb، وc، علماً أن اتجاه v→ في اتجاه محور y الموجب، و|v→|=34.

اتجاه المحور y الموجب هو (010)، وبما أن اتجاه v→ هو اتجاه المحور y الموجب، فإن:

v→=k(010)=(0k0),k>0(3a+b−5a+4b6a+bc)=(0k0)|v→|=|k|=34⇒k=
343a+b=0...............(1)−5a+4b=34.........(2)6a+bc=0...........(3)−4
×(1)+(2)⇒−17a=34⇒a=−2,b=6

بتعويض قيمة a وقيمة b في المعادلة (3) نجد:

6c=0⇒c=2+(2−)6

متجهات الموقع للنقاط: A ، وB، وC الواقعة على مستقيم واحد هي:

^a→=2i^+pj^+qk^,b→=−4i^+13j^−k^,c→=14i^+j^+5k على الترتيب:

(27) أجد قيمة p.

^BC→=18i^−12j^+6k^⇒v→=3i^−2ȷ^+k

معادلة المستقيم BC↔ هي:

(^r→=−4i^+13j^−k^+t(3i^−2ȷ^+k

متجه موقع النقطة A يحقق هذه المعادلة لأن النقطة A تقع على المستقيم BC↔

(^2i^+pȷ^+qk^=−4i^+13ȷ^−k^+t(3i^−2ȷ^+k⇒

نساوي المعاملات المتناظرة في طرفي المعادلة:

4+3t⟹t=2p=13−2t⇒p=13−2(2)=9−=2⇒

(28) أجد قيمة q.

استكمالاً لما سبق في السؤال 27 بمقارنة معامل ^k في المعادلة

(^i^+pȷ^+qk^=−4i^+13ȷ^−k^+t(3i^−2ȷ^+k

نستنتج أن:

q=−1+t=−1+2=1

(29) أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم المار بالنقطتين: A، وB مع المستوى yz.

معادلة AB↔ هي معادلة BC↔ نفسها

^r→=(−4+3t)i^+(13−2t)ȷ^+(−1+t)k

متجه موقع أي نقطة في المستوي yz يكون على الصورة yȷ^+zk^

إذن، لإيجاد نقطة التقاطع نبحث عن قيم z,y,t التي تحقق المعادلة:

yȷ^+zk^=(−4+3t)1^+(13−2t)ȷ^+(−1+t)k^0=−4+3t⇒t=43y=13−2t⇒y=13−83=313z=−1+t⇒z=−1+43=13

إذن، النقطة المطلوبة هي: (0,313,13)

(30) أجد طول AC¯ في صورة: a14، حيث a عدد صحيح.

A(2,9,1),C(14,1,5)AC=122+(−8)2+42=224=414

(31) B(2,3),A(1,2) نقطتان في المستوى الإحداثي. أجد معادلة المستقيم المار بهاتين النقطتين، ثم أجد معادلة متجهة لهذا المستقيم، مقارناً بين المعادلتين.

ميل AB↔: m=yz−y1xz−x1=3−22−1=1

المعادلة الديكارتية للمستقيم AB↔: y−2=1(x−1)⇒y=x+1

اتجاه AB↔: v→=⟨1,1⟩

المعادلة المتجهة للمستقيم ⟨AB↔: r→=r→0+tv→⇒r→=⟨1,2⟩+t⟨1,1

v→ تقابل الميل m، r→0 تقابل المقطع y في المعادلة الديكارتية:

يمكن الوصول للمعادلة الديكارتية من المعادلة المتجهة وذلك بحذف المتغير الوسيط t من المعادلة المتجهة:

r→=⟨x,y⟩=⟨1+t,2+t⟩⇒x=1+t⇒t=x−1y=2+t⇒y=2+x−1⇒y=x+1

إذا كان المستقيم l1 يمر بالنقطة A(−3,−1,12)، والنقطة B(−2,0,11)، وكان المستقيم l2 يوازي المستقيم l1، ويمر بالنقطة C(11,9,12)، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(32) أجد معادلة متجهة للمستقيم l1.

⟨AB→=⟨1,1,−1

اتجاه المستقيم l1 هو: ⟨v→1=⟨1,1,−1

ومعادلته هي: ⟨r→=⟨−3,−1,12⟩+t⟨1,1,−1

(33) أجد معادلمتجهة للمستقيم l2.

بما أن l1∥l2 فلهما الاتجاه نفسه ⟨v→1=⟨1,1,−1 أعلاه.

إذن، معادلة l2:

⟨r→=⟨11,9,12⟩+u⟨1,1,−1

إذا كانت: A(−1,−2,1، وB(−3,4,−5)، وC(0,−2,4)، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(34) أجد إحداثيات النقطة M التي هي نقطة منتصف AB¯ .

(M=(−1−32,−2+42,1−52)=(−2,1,−2

(35) إذا وقعت النقطة N على القطعة المستقيمة BC¯ ، وكان: |NC|2=|BN→|→، فأجد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطتين M وN.

NC→|=2|BN→|⇒NC=2BNBC→=BN→+NC→=BN→+2BN→=3BN→⇒BN|
→=13BC→MN→=MB→+BN→=MB→+13BC→MB→=⟨−3−(−2),4−1,−5
−(−2)⟩=⟨−1,3,−3⟩BC→=⟨0−(−3),−2−4,4−(−5)⟩=⟨3,−6,9⟩⇒MN→=⟨
→−1,3,−3⟩+13⟨3,−6,9⟩=⟨0,1,0⟩=v

معادلة المستقيم MN↔ المتجهة
هي: r→=r→0+tv→⇒r→=⟨−2,1,−2⟩+t⟨0,1,0⟩

(36) يمر المستقيم l1 بالنقطتين: P(−5,2,4),Q(−2,3,−3)، ويمر المستقيم l2 بالنقطتين:R(0,−8,−1),S(12,−23,a). إذا كان المستقيم l1 والمستقيم l2 متقاطعين، فما قيمة a؟ وما إحداثيات نقطة تقاطعهما؟

اتجاه PQ↔: PQ→=⟨3,−5,−1⟩=v→1

معادلة PQ↔: r→=⟨−2,−3,3⟩+t⟨3,−5,−1⟩

اتجاه RS↔: RS→=⟨12,−15,a+1⟩=v→

معادلة RS↔: r→=⟨0,−8,−1⟩+u⟨12,−15,a+1⟩

نساوي r→ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة:

⟨−2,−3,3⟩+t⟨3,−5,−1⟩=⟨0,−8,−1⟩+u⟨12,−15,a+1⟩⇒−2+3t=12u......
......................(1)−3−5t=−8−15u⇒1−t=−3u...........(2)3−t=−1+u(
(a+1)⇒4−t=u(a+1)....(3

بحل (1) و(2) نجد أن: u=13,t=2

وبتعويض القيمتين u=13,t=2 في المعادلة (3) كونهما يحققانها لأن المستقيمين متقاطعين نجد أن:

a+1)⇒6=a+1⇒a=5)13=4−2

نجد نقطة التقاطع بتعويض t=2 في معادلة PQ↔:

r→=⟨−2,−3,3⟩+2⟨3,−5,−1⟩=⟨4,−13,1⟩

إذن، نقطة التقاطع هي: (4,−13,1)

(37) أقمار صناعية: مر القمر الصناعي S1 بموقعين، هما: $A(30,-75,90)$، $B(100,65,220)$، ومر القمر الصناعي S2 بموقعين، هما: $C(-20,45,200)$، $D(120,85,160)$. أحدد العلاقة بين المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ والمستقيم $\overleftrightarrow{CD}$ من معادلتيهما.

$\overrightarrow{AB}=\langle 70,140,130\rangle$

يمكن تبسيط اتجاه $\overrightarrow{AB}$: $\vec{v}_1=\langle 7,14,13\rangle$

تكون معادلته: $\vec{r}=\langle 30,-75,90\rangle+t\langle 7,14,13\rangle$

$\overrightarrow{CD}=\langle 140,40,-40\rangle$

يمكن تبسيط اتجاه $\overrightarrow{CD}$ وتكون معادلته: $\vec{v}_2=\langle 7,2,-2\rangle$

المستقيمان ليسا متوازين لأن اتجاهيهما ليسا متوازيين $(\vec{v}_1\neq k\vec{v}_2)$

نبحث عن تقاطع المستقيمين بمحاولة إيجاد t,u بحيث:

$\langle 30+7t,-75+14t,90+13t\rangle=\langle -20+7u,45+2u,200-2u\rangle 30+7t=-20+7u\Rightarrow u=507+t.......(1)-75+14t=45+2u\Rightarrow u=-60+7t....(2)90+13t=200-2u\Rightarrow 13t+2u=110....(3)$

بحل المعادلتين (1) و(2) نجد أن: $t=23521,u=38521$

لكن هاتين القيمتين لا تحققان المعادلة (3) إذن المستقيمان غير متقاطعين لعدم تحقق المعادلات الثلاث معاً، وهما غير متوازيين كما وضحنا سابقاً فهما إذن متخلفان.

(38) أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

تم حلها في موضعها تحت عنوان "مسألة اليوم"