مهارات التفكير العليا

التوزيع الطبيعي

(41) أكتشف الخطأ: قالت عبير: "إذا كان: $X\sim N(6.4,0.09)$، فإن 95% من البيانات تقع بين 6.22 و6.58". أكتشف الخطأ في قول عبير، ثم أصححه.

تقع 95% من البيانات بين $\mu-2\sigma, \mu+2\sigma$ (حسب القاعدة التجريبية)، وهذا يعني الفترة من 5.8 إلى 7 وليس الفترة التي ذكرتها عبير.

الخطأ الذي ارتكبته عبير، هو أنها اعتبرت $\sigma=0.09$ والصواب هو أن $\sigma=0.09=0.3$.

(42) تبرير: إذا كان $X\sim N(\mu,\sigma 2, P(X<15)=0.1469, P(X>35)=0.025$)، فأجد قيمة كل من μ,σ، مبرراً إجابتي.

$P(X<15)=P(Z<15-\mu\sigma)=0.1469$

نفرض أن $\mu\sigma=z-15$ ، فيكون $P(Z<z)=0.1469$

الاحتمال المعطى (0.1469) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z سالبة

$P(Z<-z)=P(Z>z)0.1469=1-P(Z<z)P(Z<z)=1-0.1469=0.8531\Rightarrow z\Rightarrow =1.05$

إذن، قيمة z التي تحقق الاحتمال المعطى هي -1.05

$\mu\sigma=-1.05\Rightarrow 15-\mu=-1.05\sigma.....1P(X>35)=P(Z>35-\mu-15\Rightarrow \sigma)=0.025$

نفرض أن $\mu\sigma=Z-35$، فيكون $P(Z>z)=0.025$

الاحتمال المعطى (0.025) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة

$P(Z<z)=1-P(Z>z)=1-0.025=0.975\Rightarrow z=1.96\Rightarrow 35-\mu\sigma=1.96\Rightarrow 35-\mu\Rightarrow =1.96\sigma.....22-1: 20=3.01\sigma\Rightarrow\sigma\approx 6.64,\mu\approx 22$

(43) تبرير: تقدم 100000 طالب لاختبار دولي، وبلغ عدد الطلبة الذين زادت علاماتهم في الاختبار على 90% نحو 10000 طالب، منهم 5000 طالب أحرزوا علامات أكثر من 95%. إذا كانت علامات الطلبة المتقدمين تتبع توزيعاً طبيعياً، فأجد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري للعلامات.

$P(X>90)=P(Z>90-\mu\sigma)=10000100000=0.1$

نفرض أن $\mu\sigma=Z-90$ ، فيكون $P(Z>z)=0.1$

الاحتمال المعطى (0.1) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة

$P(Z<z)=1-P(Z>z)=1-0.1=0.9\Rightarrow z=1.28\Rightarrow 90-\mu\sigma=1.28\Rightarrow 90-\mu=1.2\Rightarrow 8\sigma.....1P(X>95)=P(Z>95-\mu\sigma)=5000100000=0.05$

نفرض أن $\mu\sigma=z-95$، فيكون $P(Z>z)=0.05$

الاحتمال المعطى (0.05) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة

$P(Z<z)=1-P(Z>z)=1-0.05=0.95\Rightarrow z=1.64\Rightarrow 95-\mu\sigma=1.64\Rightarrow 95-\mu=\Rightarrow 1.64\sigma.....2(2)\text{-}(1):\ 5=0.36\sigma\Rightarrow\sigma\approx13.89,\mu\approx72.22$

(44) تحد: أجرت باحثة تفاعلاً كيميائياً بصورة متكررة، فوجدت أن الزمن اللازم لحدوث التفاعل يتبع توزيعاً طبيعياً، وأن 5% من التجارب يلزمها أكثر من 13 دقيقة لحدوث التفاعل، وأن 12% منها تتطلب أقل من 10 دقائق لحدوث التفاعل. أقدر الوسط الحسابي والانحراف المعياري لزمن التفاعل.

$P(X>13)=P(Z>13-\mu\sigma)=0.05$

نفرض أن $\mu\sigma=Z-13$، فيكون $P(Z>z)=0.05$

الاحتمال المعطى (0.05) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة

$P(Z<z)=1-P(Z>z)=1-0.05=0.95\Rightarrow z=1.64\Rightarrow\frac{13-\mu}{\sigma}=1.64\Rightarrow 13-\mu=1.64\sigma\ldots\ldots(1)$

$P(X<10)=P(Z<\frac{10-\mu}{\sigma})=0.12$

نفرض أن $Z=\frac{10-\mu}{\sigma}$، فيكون $P(Z<z)=0.12$

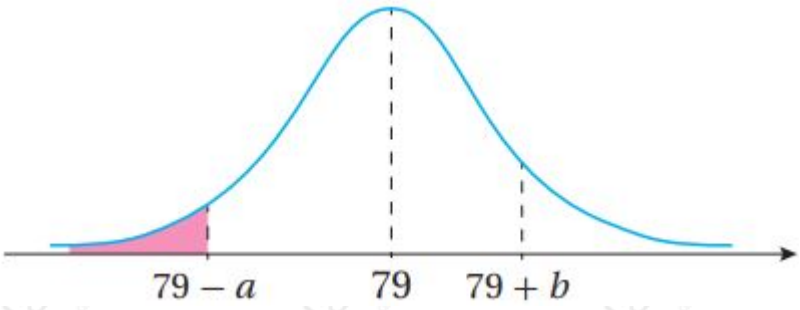
الاحتمال المعطى (0.12) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z سالبة

$P(Z<-z)=1-P(Z<z)0.12=1-P(Z<z)\Rightarrow P(Z<z)=0.88\Rightarrow z=1.17\Rightarrow$

إذن، قيمة z التي تحقق الاحتمال المعطى $P(Z<z)=0.12$ هي $z=-1.17$

$\frac{10-\mu}{\sigma}=-1.17\Rightarrow 10-\mu=-1.17\sigma\ldots\ldots\ldots(2)$: $3=2.81\sigma\Rightarrow\sigma\approx 1.07,-10\Rightarrow\mu\approx 11.25$

تبرير: يبين الشكل المجاور منحنى التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي X الـذي وسـطه الحسـابي 79، وتبـــاينه 144. إذا كـــان: $P(79-a\leq X\leq 79+b)=0.6463$ وكـــــــــان: $P(X\geq 79+b)=2P(X\leq 79-a)$ فأجد كلاً مما يأتي، مبرراً إجابتي:



(45) مساحة المنطقة المظللة.

المساحة الكلية تحت المنحى هي 100%

المساحة تحت المنحنى بين القيمتين $79-b,79+a$ هي 64.63%

إذن، المساحة تحت المنحنى خارج القيمتين $79-b,79+a$ هي:

$100\%-64.63\%=35.37\%$

وهي تمثل منطقتين إحداهما مساحتها ضعف الأخرى (حسب المعطى)، فتكون مساحة المنطقة المظللة تساوي $3\%35.37=\%11.79$

أو نكتب:

$P(79-a\leq X\leq 79+b)=P(X\leq 79+b)-P(X\leq 79-a)\Rightarrow P(X\leq 79+b)-P(X\leq 79-a)=0.6463.....(1)P(X\geq 79+b)=2P(X\leq 79-a)\Rightarrow 1-P(X<79+b)=2P(X\leq 79-a)\Rightarrow P(X<79+b)+2P(X\leq 79-a)=1.....2(2)-(1)\Rightarrow 3P(X\leq 79-a)=0.3537\Rightarrow P(X\leq 79-a)=0.1179,P(X\geq 79+b)=0.2358$

إذن، مساحة المنطقة المظللة تساوي: $P(X\leq 79-a)=0.1179$

(46) قيمة الثابت b.

وجدنا في السؤال السابق أن:

$P(X\geq 79+b)=0.2358\Rightarrow P(Z\geq \frac{79+b-79}{12})=0.2358\Rightarrow P(Z\geq \frac{b}{12})=0.2358$

نفرض أن $\frac{b}{12}=z$، فيكون:

$P(Z\geq z)=0.2358\Rightarrow P(Z<z)=1-0.2358=0.7642\Rightarrow z=0.72\Rightarrow \frac{b}{12}=0.72\Rightarrow b=8.64$