

## أدرب وأحل المسائل

### التكامل بالتعويض

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\int (x^2+4) dx \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x^2+4 dx u &= x^2+4 \Rightarrow du dx = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \\ \int (x^2+4) dx &= \int x u \times \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int u^2 du \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{u^3}{3} \right) + C = \frac{1}{6} (x^2+4)^3 + C \end{aligned}$$

$$\int x^2(2x^3+5)^4 dx \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x^2(2x^3+5)^4 dx u &= 2x^3+5 \Rightarrow du dx = 6x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{6x^2} \\ \int x^2(2x^3+5)^4 dx &= \int x^2 \frac{du}{6x^2} u^4 \\ &= \frac{1}{6} \int u^4 du = \frac{1}{6} \left( \frac{u^5}{5} \right) + C = \frac{1}{30} (2x^3+5)^5 + C \end{aligned}$$

$$\int (3x^2+7) dx \quad (3)$$

$$\begin{aligned} 3x^2+7 dx u &= x^2+7 \Rightarrow du dx = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \\ \int (3x^2+7) dx &= \int 3x u \times \frac{du}{2x} = \frac{3}{2} \int u^2 du \\ &= \frac{3}{2} \left( \frac{u^3}{3} \right) + C = \frac{1}{2} (x^2+7)^3 + C \end{aligned}$$

$$\int x^6 e^{1-x^7} dx \quad (4)$$

$$\begin{aligned} x^6 e^{1-x^7} dx u &= 1-x^7 \Rightarrow du dx = -7x^6 \Rightarrow dx = \frac{du}{-7x^6} \\ \int x^6 e^{1-x^7} dx &= \int x^6 e^u \times \frac{du}{-7x^6} \\ &= \frac{1}{-7} \int e^u du = -\frac{1}{7} e^u + C = -\frac{1}{7} e^{1-x^7} + C \end{aligned}$$

$$\int x^4(x^5+9)^3 dx \quad (5)$$

$$\begin{aligned} x^4(x^5+9)^3 dx u &= x^5+9 \Rightarrow du dx = 5x^4 \Rightarrow dx = \frac{du}{5x^4} \\ \int x^4(x^5+9)^3 dx &= \int x^4 u^3 \times \frac{du}{5x^4} \\ &= \frac{1}{5} \int u^3 du = \frac{1}{5} \left( \frac{u^4}{4} \right) + C = \frac{1}{20} (x^5+9)^4 + C \end{aligned}$$

$$\int (3x^2-1) e^{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (3x^2-1) e^{x^3-x} dx u &= x^3-x \Rightarrow du dx = 3x^2-1 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2-1} \\ \int (3x^2-1) e^{x^3-x} dx &= \int (3x^2-1) e^u \times \frac{du}{3x^2-1} \\ &= \int e^u du = e^u + C = e^{x^3-x} + C \end{aligned}$$

$$\int (3x-3x^2-2x+4) dx \quad (7)$$

$$\int (3x-3x^2-2x+4) dx = \int (x^2-2x+4) dx = \frac{1}{3} x^3 - x^2 + 4x + C$$

$$x^2 - 2x + 4 dx = \int 3x - 3u \times du \quad 2x - 2 = \int 3(x-1)u \times du \quad 2(x-1) = \int 32u - 12 du = 3u^2 + C = 3x^2 - 2x + 4 + C$$

$$(x dx) \quad (81x \ln f$$

$$\int x dx = \int 1x u \times x du = \int 1u du = \ln x \Rightarrow du dx = 1x \Rightarrow dx = x du \int 1x \ln x dx = \ln |1x \ln x| + C \quad |\ln u| + C = \ln$$

$$(x)4 dx \quad (9x(1 + \cos \sin f$$

$$x(1 + \cos x) \int \sin x \Rightarrow dx = du - \sin x \Rightarrow du dx = -\sin x \quad 4 dx u = 1 + \cos x (1 + \cos \sin f x)5 + C x = \int -u^4 du = -15u^5 + C = -15(1 + \cos x)u^4 \times du - \sin x)4 dx = \int \sin$$

$$(2x dx) \quad (102x \cos \sin 5 f$$

$$2x \cos 2x \int \sin 5 2x \Rightarrow dx = du \quad 2 \cos 2x \Rightarrow du dx = 2 \cos 2x \quad x du = \sin 2x \cos 5 2x)6 + C 2x = \int 12u^5 du = 112u^6 + C = 112(\sin 2x \times du \quad 2 \cos 2x dx = \int u^5 \cos$$

$$((1x)x^2 dx) \quad (11 \sin f$$

$$(u)x^2 (1x)x^2 dx = \int \sin(1x)x^2 dx u = 1x \Rightarrow du dx = -1x^2 \Rightarrow dx = -x^2 du \int \sin \sin f (1x) + C u + C = \cos u du = \cos x - x^2 du = \int -\sin$$

$$(x dx) \quad (12x e \sin \cos f$$

$$x e dx = \int \cos x e \sin x \int \cos x \Rightarrow dx = du \cos x \Rightarrow du dx = \cos x \quad x du = \sin x e \sin \cos f x + C x + C = -1 e \sin x = \int 1 e u du = \int e^{-u} du = -e^{-u} + C = -e^{-\sin x} \times du \cos$$

$$(e x(2 + e x)5 dx) \quad (13 f$$

$$e x(2 + e x)5 dx u = 2 + e x \Rightarrow du dx = e x \Rightarrow dx = du e x \int e x(2 + e x)5 dx = \int e x u^5 \times du \int u e x = \int u^5 du = 16u^6 + C = 16(2 + e x)^6 + C$$

$$(x) x dx \quad (14 (\ln \cos f$$

$$(u) x \times x du = x) x dx = \int \cos(\ln x \Rightarrow du dx = 1x \Rightarrow dx = x du \int \cos x) x dx u = \ln(\ln \cos f x) + C (\ln u + C = \sin u du = \sin \int \cos$$

$$(3x^2 - 2x - 1)(x^3 - x^2 - x)4 dx \quad (15) f$$

$$\int (3x^2 - 2x - 1)(x^3 - x^2 - x)^4 dx \quad u = x^3 - x^2 - x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 - 2x - 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2 - 2x - 1}$$

$$\int (3x^2 - 2x - 1)(x^3 - x^2 - x)^4 dx = \int (3x^2 - 2x - 1)u^4 \times \frac{du}{3x^2 - 2x - 1}$$

$$= \int u^4 du = \frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{5}(x^3 - x^2 - x)^5 + C$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(16)  $\int (2x-1)ex^{2-x} dx$

$$\int (2x-1)ex^{2-x} dx \quad u = x^2 - x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x - 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x - 1}$$

$$\int (2x-1)ex^{2-x} dx = \int (2x-1)e^{u^2-2} \times \frac{du}{2x-1}$$

$$= \int e^{u^2-2} du = e^{-2} \int e^{u^2} du = e^{-2} \left( \frac{1}{2} e^{u^2} \right) + C = \frac{1}{2} e^{-2} e^{(x^2-x)^2} + C$$

(17)  $\int \frac{1}{x^2} e^{1/x} dx$

$$\int \frac{1}{x^2} e^{1/x} dx \quad u = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow dx = -x^2 du = -\frac{1}{u^2} du$$

$$\int \frac{1}{x^2} e^{1/x} dx = \int \frac{1}{u^2} e^u \times \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = -\int \frac{e^u}{u^2} du$$

$$= -\left( -\frac{e^u}{u} \right) + C = \frac{e^u}{u} + C = \frac{e^{1/x}}{1/x} + C = x e^{1/x} + C$$

(18)  $\int x e^{3 \ln x} dx$

$$\int x e^{3 \ln x} dx \quad u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x du \Rightarrow x = e^u$$

$$\int x e^{3 \ln x} dx = \int e^u e^{3u} \times e^u du = \int e^{5u} du = \frac{1}{5} e^{5u} + C = \frac{1}{5} e^{5 \ln x} + C = \frac{1}{5} x^5 + C$$

(19)  $\int (x^3+x)x^4+2x^2+1 dx$

$$\int (x^3+x)x^4+2x^2+1 dx \quad u = x^4+2x^2+1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x^3+4x \Rightarrow dx = \frac{du}{4x^3+4x}$$

$$\int (x^3+x)x^4+2x^2+1 dx = \int (x^3+x)u \times \frac{du}{4x^3+4x} = \int \frac{(x^3+x)u du}{4(x^3+x)} = \int \frac{1}{4} u du$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{8} (x^4+2x^2+1)^2 + C$$

(20)  $\int (3x^2+1)dx$

$$\int (3x^2+1)dx \quad u = x^2+1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int (3x^2+1)dx = \int (3x^2+1) \times \frac{du}{2x} = \int \frac{3x^2+1}{2x} du = \int \frac{3x^2+1}{2(x^2+1)} du = \int \frac{3(x^2+1)-2}{2(x^2+1)} du = \int \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2(x^2+1)} \right) du$$

$$= \frac{3}{2}u - \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{3}{2}(x^2+1) - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C$$

(21)  $\int (2x+1)(x^2+x+4)^3 dx$

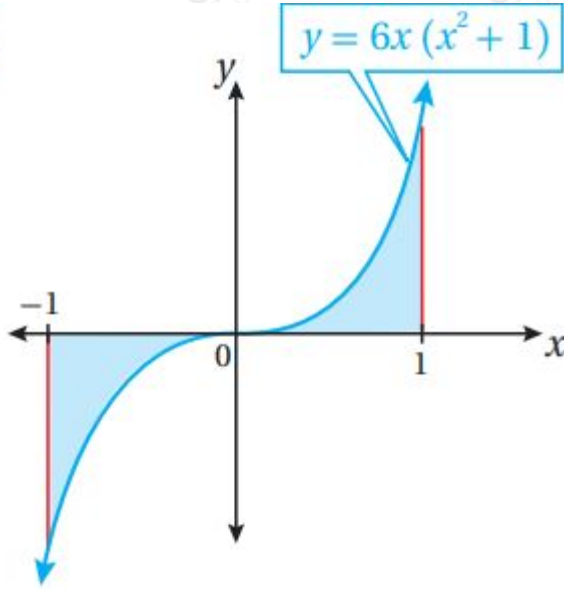
$$\int (2x+1)(x^2+x+4)^3 dx \quad u = x^2+x+4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x+1 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x+1}$$

$$\int (2x+1)(x^2+x+4)^3 dx = \int (2x+1)u^3 \times \frac{du}{2x+1} = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}(x^2+x+4)^4 + C$$

$$= (2)^2 + 2 + 4 = 10 \quad x=1 \Rightarrow u=(1)^2+1+4=6 \quad \int_{-1}^1 2x+1(x^2+x+4)^3 dx = \int_{-1}^1 6 \cdot 10^2 x+1 u^3 \times du \quad 2x+1 = \int_{610}^6 10u-3 du = -12u-2 \Big|_{610}^6 = -12u^2 \Big|_{610}$$

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلين البيانيين الآتيين:

22



$$A = -\int_{-1}^0 6x(x^2+1) dx + \int_0^1 6x(x^2+1) dx$$

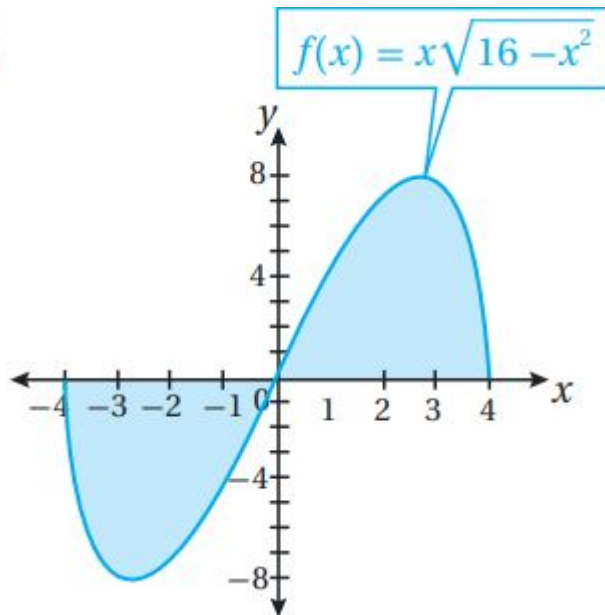
هناك طريقتان للحل: إما التكامل بالتعويض، أو تكامل كثير حدود بعد توزيع الأقواس.

طريقة التكامل بالتعويض:

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \quad x=0 \Rightarrow u=(0)^2+1=1 \quad x=-1 \Rightarrow u=(-1)^2+1=2 \quad A = -\int_2^1 6x(x^2+1) \frac{du}{2x} + \int_1^2 6x(x^2+1) \frac{du}{2x} = -\int_2^1 3u du + \int_1^2 3u du = -\frac{3}{2}u^2 \Big|_2^1 + \frac{3}{2}u^2 \Big|_1^2 = -\frac{3}{2}(1)^2 + \frac{3}{2}(2)^2 + \frac{3}{2}(2)^2 - \frac{3}{2}(1)^2 = 9$$

ومنه مساحة المنطقة المظللة هي 9 وحدات مربعة.

23



$$A = -\int_{-4}^0 x\sqrt{16-x^2} dx + \int_0^4 x\sqrt{16-x^2} dx$$

$$u = 16 - x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x \Rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$$

$$2x dx = -du \Rightarrow u = 16 - (0)^2 = 16 \quad x = -4 \Rightarrow u = 16 - (-4)^2 = 0$$

$$x = 4 \Rightarrow u = 16 - (4)^2 = 0$$

$$A = -\int_{16}^0 \frac{u}{-2} \frac{du}{-2x} + \int_0^4 x\sqrt{16-x^2} dx = -\int_0^{16} \frac{u}{2} \frac{du}{-2x} + \int_0^4 x\sqrt{16-x^2} dx$$

$$= -\int_0^{16} \frac{1}{4} u \frac{du}{x} + \int_0^4 x\sqrt{16-x^2} dx = -\int_0^{16} \frac{1}{4} u \frac{du}{\sqrt{16-u}} + \int_0^4 x\sqrt{16-x^2} dx$$

$$= -\int_0^{16} \frac{1}{4} \sqrt{u} du + \int_0^4 x\sqrt{16-x^2} dx = -\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^{16} + \int_0^4 x\sqrt{16-x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{6} (16)^{3/2} + \int_0^4 x\sqrt{16-x^2} dx = -\frac{1}{6} (64) + \int_0^4 x\sqrt{16-x^2} dx = -\frac{16}{3} + \int_0^4 x\sqrt{16-x^2} dx$$

$$= -\frac{16}{3} + \left[ -\frac{1}{3} (16-x^2)^{3/2} \right]_0^4 = -\frac{16}{3} + \left[ -\frac{1}{3} (16-16)^{3/2} + \frac{1}{3} (16-0)^{3/2} \right]$$

$$= -\frac{16}{3} + \left[ 0 + \frac{1}{3} (64) \right] = -\frac{16}{3} + \frac{64}{3} = \frac{48}{3} = 16$$

ومنه مساحة المنطقة المظللة هي 1283 وحدات مربعة.

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران  $f(x)$ ، ونقطة يمر بها منحنى  $y=f(x)$  أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران  $f(x)$ :

(24)  $f'(x) = xe^{4-x^2}; (-2, 1)$

$$f(x) = \int xe^{4-x^2} dx \quad u = 4 - x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x \Rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$$

$$2x dx = -du \Rightarrow f(x) = \int xe^{4-x^2} dx = \int xe^u \frac{du}{-2x} = -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^u + C = -\frac{1}{2} e^{4-x^2} + C$$

لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة  $(-2, 1)$ :

$$f(x) = -\frac{1}{2} e^{4-x^2} + C \Rightarrow f(-2) = -\frac{1}{2} e^{4-(-2)^2} + C \Rightarrow 1 = -\frac{1}{2} e^0 + C \Rightarrow C = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} e^{4-x^2} + \frac{3}{2}$$

(25)  $f'(x) = 2x(1-x^2)^2; (0, -1)$

$$f(x) = \int 2x(1-x^2)^2 dx \quad u = 1 - x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x \Rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$$

$$2x dx = -du \Rightarrow f(x) = \int 2x(1-x^2)^2 dx = \int (1-u)^2 \frac{du}{-1} = -\int (1-u)^2 du = -\int (1-2u+u^2) du = -\left[ u - u^2 + \frac{u^3}{3} \right] + C$$

$$= -\left[ 1 - 2(1-x^2) + \frac{(1-x^2)^3}{3} \right] + C = -\left[ 1 - 2 + 2x^2 + \frac{1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6}{3} \right] + C$$

$$= -\left[ -1 + 2x^2 + \frac{1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6}{3} \right] + C = -\left[ -1 + 2x^2 + \frac{1}{3} - x^2 + x^4 - \frac{x^6}{3} \right] + C$$

$$= -\left[ -\frac{2}{3} + x^2 + x^4 - \frac{x^6}{3} \right] + C = \frac{2}{3} - x^2 - x^4 + \frac{x^6}{3} + C$$

$$= \int 2xu^2 \times du - 2x = \int -u - 2du = u - 1 + C = 11 - x^2 + C$$

لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة 0, -1:

$$f(x) = 11 - x^2 + C \Rightarrow f(0) = 11 - 0^2 + C \Rightarrow -1 = 1 + C \Rightarrow C = -2$$

(26) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:  
 $v(t) = -2t(1+t^2)^3$ ، حيث  $t$  الزمن بالثواني، و  $v$  سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا  
 كان الموقع الابتدائي للجسيم  $m$  4، فأجد موقع الجسيم بعد  $t$  ثانية من بدء الحركة.

$$s(t) = \int -2t(1+t^2)^3 dt \quad u = 1+t^2 \Rightarrow du/dt = 2t \Rightarrow dt = du/2t$$

$$\int -2t(1+t^2)^3 dt = \int -2t(1+t^2)^3 \times du/2t = \int -2(1+t^2)^3 du = \int -2u^3 du = -\frac{2}{4}u^4 + C = -\frac{1}{2}(1+t^2)^4 + C$$

بما أن الموقع الابتدائي للجسيم  $m$  4، إذن،  $s(0) = 4$ :

$$s(t) = -\frac{1}{2}(1+t^2)^4 + C \Rightarrow s(0) = -\frac{1}{2}(1+0^2)^4 + C = 4 \Rightarrow -\frac{1}{2} + C = 4 \Rightarrow C = \frac{9}{2}$$



(27) زراعة: يمثل الاقتران  $V(t)$  سعر دونم أرض  
 زراعية في الأغوار الأردنية (بالدينار) بعد  $t$  سنة من  
 الآن. إذا كان:  $V'(t) = 0.4t^3 - 0.2t^4 + 8000$  هو  
 معدل التغير في سعر دونم الأرض، فأجد  $V(t)$ ، علماً  
 بأن سعره الآن 5000 JD.

$$V(t) = \int (0.4t^3 - 0.2t^4 + 8000) dt = 0.1t^4 - 0.04t^5 + 8000t + C$$

$$V(t) = \int (0.4t^3 - 0.2t^4 + 8000) dx = \int 0.4t^3 u^3 \times du/0.8t^3 = \int 1/2 u^3 du = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{8} u^4 + C = \frac{1}{8} (0.2t^4 + 8000)^2 + C$$

بما أن سعر دونم الأرض الآن هو 5000 دينار، إذن،  $V(0) = 5000$  ومنه:

$$V(t) = \frac{1}{8} (0.2t^4 + 8000)^2 + C \quad V(0) = \frac{1}{8} (0.2(0)^4 + 8000)^2 + C = 5000$$

$$\frac{1}{8} (8000)^2 + C = 5000 \Rightarrow \frac{1}{8} \times 64,000,000 + C = 5000 \Rightarrow 8,000,000 + C = 5000 \Rightarrow C = 5000 - 8,000,000 = -7,995,000$$

(28) سكان: أشارت دراسة إلى أن عدد السكان في إحدى المدن يتغير سنوياً بمعدل  
 يمكن نمذجته بالاقتران:  $P'(t) = 4e^{0.2t^4} + e^{0.2t}$ ، حيث  $t$  عدد السنوات منذ عام

2015 م، و  $P(t)$  عدد السكان بالآلاف. أجد مقدار الزيادة في عدد السكان عام 2015 م إلى عام 2025 م.

$$\begin{aligned} dt &= du \quad 0.2e^{0.2t} = 10 \Rightarrow u = 4 + e^{0.2(10)} = 4 + e^2 \\ t = 0 &\Rightarrow u = 4 + e^{0.2(0)} = 5 \\ \int_0^{10} 0.2e^{0.2t} dt &= \int_5^{4+e^2} du \\ 10 &= 4 + e^2 - 5 \\ e^2 &= 11 \\ e^2 - 1 &= 10 \\ e^2 &\approx 11 \\ 4 + e^2 - 4 &= 11 \\ 11 &\approx 46 \end{aligned}$$

إذن يزداد عدد سكان هذه المدينة بحوالي 46 ألف شخص من 2015 م إلى 2025 م.