

إجابات كتاب التمارين

التكامل بالتعويض

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\int (x^2 + 3) dx \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x^2 + 3 dx u = x^2 + 3 \Rightarrow du dx = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \\ \int (x^2 + 3) dx = \int x u^2 \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int u^2 du \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{6} (x^2 + 3)^3 + C \end{aligned}$$

$$\int (x^4 e^{x^5} + 2) dx \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x^4 e^{x^5} + 2 dx u = x^5 + 2 \Rightarrow du dx = 5x^4 \Rightarrow dx = \frac{du}{5x^4} \\ \int (x^4 e^{x^5} + 2) dx = \int x^4 e^u \frac{du}{5x^4} + \int 2 dx \\ = \frac{1}{5} \int e^u du + 2x + C = \frac{1}{5} e^{x^5} + 2x + C \end{aligned}$$

$$\int (x+1)(x^2+2x+5)^4 dx \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (x+1)(x^2+2x+5)^4 dx u = x^2 + 2x + 5 \Rightarrow du dx = 2x + 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x+2} \\ \int (x+1)(x^2+2x+5)^4 dx = \int (x+1) u^4 \frac{du}{2x+2} \\ = \frac{1}{2} \int u^4 du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{10} (x^2 + 2x + 5)^5 + C \end{aligned}$$

$$\int (x)^3 x dx \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (x)^3 x dx = \int u^3 x du = \int 0 u^3 du = x \Rightarrow du dx = 1/x \Rightarrow dx = x du \\ \int (x)^3 x dx = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{4} (\ln x)^4 + C \end{aligned}$$

$$\int (x dx)^5 \sin^4 \cos^3 x \quad (5)$$

$$\begin{aligned} x dx = \int \cos^3 x \sin^4 x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x} \Rightarrow du dx = \cos x dx \\ \int \cos^3 x \sin^4 x dx = \int u^4 \cos^2 x dx = \int u^4 (1 - \sin^2 x) dx \\ = \int u^4 dx - \int u^4 \sin^2 x dx = \frac{1}{5} u^5 - \int u^4 \sin^2 x dx \\ = \frac{1}{5} (\sin^5 x) - \int u^4 \sin^2 x dx = \frac{1}{5} \sin^5 x - \int u^4 \sin^2 x dx \end{aligned}$$

$$\int (x dx)^6 \cos^3 \sin^4 x \quad (6)$$

$$\begin{aligned} x dx = \int \cos^3 x \sin^4 x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{-\cos x} \Rightarrow du dx = -\cos x dx \\ \int \cos^3 x \sin^4 x dx = \int u^4 (-\cos^2 x) dx = -\int u^4 \cos^2 x dx \\ = -\int u^4 (1 - \sin^2 x) dx = -\int u^4 dx + \int u^4 \sin^2 x dx \\ = -\frac{1}{5} u^5 + \int u^4 \sin^2 x dx = -\frac{1}{5} \cos^5 x + \int u^4 \sin^2 x dx \end{aligned}$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$\int_1^2 (12x^2(x^3+1)^2) dx \quad (7)$$

$$\begin{aligned} 12x^2(x^3+1)^2 dx &= u^2 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2} \\ \int_1^2 12x^2(x^3+1)^2 dx &= \int_2^9 2u^2 \frac{du}{3} = \frac{2}{3} \int_2^9 u^2 du = \frac{2}{3} \left[\frac{u^3}{3} \right]_2^9 = \frac{2}{9} (9^3 - 2^3) = \frac{2}{9} (729 - 8) = \frac{2}{9} \cdot 721 = \frac{1442}{9} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 (1x^3x^2+2) dx \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1x^3x^2+2) dx &= \int_0^1 (3x^2+2) dx \\ &= \left[x^3 + 2x \right]_0^1 = (1 + 2) - (0 + 0) = 3 \end{aligned}$$

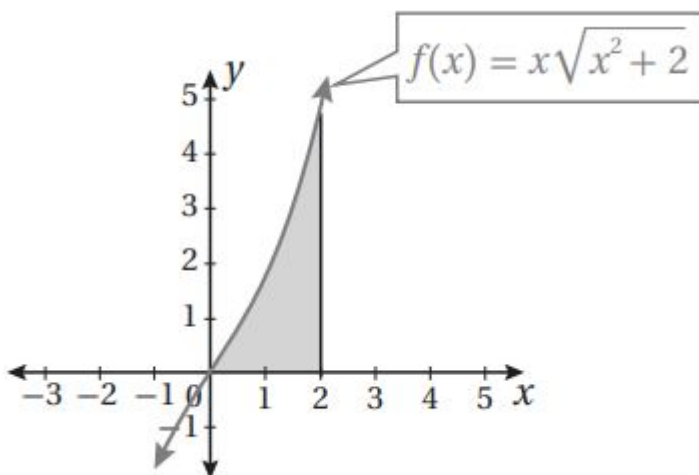
$$\int_1^e (x)^{2x} dx \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \int_1^e (x)^{2x} dx &= \int_1^e e^{2x \ln x} dx \\ &= \int_1^e e^{2x \ln x} dx \end{aligned}$$

$$\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^5 dx \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^5 dx &= \int_0^1 (x+1)u^5 \frac{du}{2x+2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^3 (x+1)u^5 du \end{aligned}$$

(11) أجد مساحة المنطقة المظللة في التمثيل البياني المجاور.



$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 x \sqrt{x^2+2} dx \\ &= \int_0^2 x(x^2+2)^{1/2} dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{3} (x^2+2)^{3/2} dx \end{aligned}$$

(12) الإيراد الحدي: يمثل الاقتران: $R'(x) = 50 + 3.5xe^{-0.1x^2}$ الإيراد الحدي (بالدينار) لكل قطعة تباع من إنتاج إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المباعة، و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$ ، علماً بأن $R(0) = 0$.

$$R(x) = \int (50 + 3.5xe^{-0.1x^2}) dx = \int 50 dx + \int 3.5xe^{-0.1x^2} dx = 50x + \int 3.5xe^{-0.1x^2} dx$$

$$u = -0.1x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -0.2x \Rightarrow dx = \frac{du}{-0.2x}$$

$$\int 3.5xe^{-0.1x^2} dx = \int 3.5x e^u \frac{du}{-0.2x} = \int -17.5e^u du = -17.5e^{-0.1x^2} + C$$

$$R(0) = 0 \Rightarrow 0 - 17.5 + C = 0 \Rightarrow C = 17.5$$

يمثل الاقتران $f'(x)$ في كل مما يأتي ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ المار بالنقطة المعطاة، أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

(13) $f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2; (2, 10)$

$$f(x) = \int 2x(4x^2 - 10)^2 dx$$

$$u = 4x^2 - 10 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 8x \Rightarrow dx = \frac{du}{8x}$$

$$\int 2x(4x^2 - 10)^2 dx = \int 2x u^2 \frac{du}{8x} = \int \frac{1}{4} u^2 du = \frac{1}{12} u^3 + C$$

$$f(2) = 10 \Rightarrow \frac{1}{12} (4 \cdot 2^2 - 10)^3 + C = 10 \Rightarrow \frac{1}{12} (8 - 10)^3 + C = 10 \Rightarrow \frac{1}{12} (-2)^3 + C = 10 \Rightarrow \frac{-8}{12} + C = 10 \Rightarrow C = 10 + \frac{2}{3} = \frac{32}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{12} (4x^2 - 10)^3 + \frac{32}{3}$$

(14) $f'(x) = x^2 e^{-0.2x^3}; (0, 32)$

$$f(x) = \int x^2 e^{-0.2x^3} dx$$

$$u = -0.2x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -0.6x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{-0.6x^2}$$

$$\int x^2 e^{-0.2x^3} dx = \int x^2 e^u \frac{du}{-0.6x^2} = \int -\frac{1}{6} e^u du = -\frac{1}{6} e^{-0.2x^3} + C$$

$$f(0) = 32 \Rightarrow -\frac{1}{6} e^{-0.2 \cdot 0^3} + C = 32 \Rightarrow -\frac{1}{6} + C = 32 \Rightarrow C = 32 + \frac{1}{6} = \frac{193}{6}$$

$$f(x) = -\frac{1}{6} e^{-0.2x^3} + \frac{193}{6}$$

(15) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$v(t) = t^2 + 1$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية من بدء الحركة.

$$s(t) = \int t^2 + 1 dt = \frac{1}{3} t^3 + t + C$$

$$\frac{ds}{dt} = 2t^2 + 1 \Rightarrow dt = \frac{ds}{2t^2 + 1}$$

$$\int 2t^2 + 1 dt = \int \frac{1}{2t^2 + 1} ds$$

$$2 \int t^2 + 1 dt = \int \frac{1}{2t^2 + 1} ds$$

$$2 \left(\frac{1}{3} t^3 + t \right) + C = s(t)$$

$$s(0) = 0 \Rightarrow 2 \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 0 \right) + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$s(t) = \frac{2}{3} t^3 + 2t$$