إجابات تدريبات الدرس

التكامل بالتعويض

تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي: $\int ٢١ (٣س^٢ + ٤س)(س^٣ + ٢س^٢)^٧ \, ءس$

الحل

نفرض أن $ص = س^٣ + ٢س^٢$

$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^٢ + ٤س$

$\frac{ءص}{٣س^٢ + ٤س} = ءس$

$\int ٢١ \cancel{(٣س^٢ + ٤س)} \, ص^٧ \cdot \frac{ءص}{\cancel{٣س^٢ + ٤س}} =$

$\int ٢١ \, ص^٧ \cdot ءص = \frac{٢١ ص^٨}{٨} + ج$

$\frac{٢١}{٨}(س^٣ + ٢س^٢)^٨ + ج$

تدريب ٢

حُلَّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.

جد قيمة التكامل الآتي:

٤) $\int_{٣}^{٠} \frac{١}{\sqrt{٥س + ١}} \, دس$

الحل

$ص = ٥س + ١ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٥$

$\Leftarrow \frac{دص}{٥} = دس$.

عندما $س = ٣ \leftarrow ص = ٥ \times ٣ + ١ = ١٦$

عندما $س = ٠ \leftarrow ص = ٥ \times ٠ + ١ = ١$

$\int_{١٦}^{١} \frac{١}{\sqrt{ص}} \cdot \frac{دص}{٥} = \frac{١}{٥} \int_{١٦}^{١} ص^{-\frac{١}{٢}} \, دص$

$\frac{١}{٥} \left[\frac{ص^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} \right]_{١٦}^{١} = \frac{٢}{٥} \left[\sqrt{ص} \right]_{١٦}^{١}$

$\frac{٢}{٥} \left(\sqrt{١} - \sqrt{١٦} \right) = \frac{٢}{٥} (١ - ٤) = \frac{٢}{٥} \times -٣ = \frac{-٦}{٥}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

تدريب ٣

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

١) $\int ٣\text{س}(\text{س}^٢ + ١)^{-٥}\, \text{ءس}$

٢) $\int ٢\text{س}\ \text{قا}^٢(١ - \text{س}^٢)\, \text{ءس}$

٣) $\int_{١}^{-١} (٤\text{س} - ١)\sqrt[٣]{\text{س} - ٢\text{س}^٢ - ١}\ \text{ءس}$

٤) $\int_{٠}^{٣} \frac{١}{\sqrt[٥]{\text{س} + ١}}\, \text{ءس}$

الحل

١) $\int ٣\text{س}(\text{س}^٢+١)^{-٥} \cdot \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^٢+١$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{٢\text{س}} = \text{ءس}$

$\int ٣\cancel{\text{س}}\ \text{ص}^{-٥} \cdot \frac{\text{ءص}}{٢\cancel{\text{س}}}$

$\frac{٣}{٢}\int \text{ص}^{-٥}\, \text{ءص} =$

$\frac{٣}{٢}\ \frac{\text{ص}^{-٥+١}}{-٥+١} + \text{ج} = \frac{٣}{٢}\ \frac{\text{ص}^{-٤}}{-٤} + \text{ج}$

$= -\frac{٣}{٨} \times \frac{١}{\text{ص}^٤} + \text{ج} = \frac{-٣}{٨(\text{س}^٢+١)^٤} + \text{ج}$

٢) $\int 2س \, قا^2(1-س^2) \, دس$

$ص = 1 - س^2$

$\frac{دص}{دس} = -2س$

$دس = \frac{دص}{-2س}$

$\int 2س \, قا^2 ص \cdot \frac{دص}{-2س}$

$\int - قا^2 ص \cdot دص$

$- ظا ص + جـ$

$- ظا(1-س^2) + جـ$

٣) $\int_{1}^{-1} (4س-1) \sqrt[3]{س-2س^2-1} \, دس$

$ص = س - 2س^2 - 1$

$\frac{دص}{دس} = 1 - 4س$

$دس = \frac{دص}{1-4س}$

$\int_{1}^{-1} (4س-1) \sqrt[3]{س-2س^2-1} \, دس = \int_{1}^{-1} (4س-1) \sqrt[3]{س-2س^2-1} \, دس =$

$\int_{1}^{-1} \cancel{(4س-1)} \, ص^{\frac{1}{3}} \frac{دص}{\cancel{1-4س}} = \int_{1}^{-1} - ص^{\frac{1}{3}} دص = \left[-\frac{ص^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \right]_{1}^{-1}$

$-\frac{3}{4} \left[\sqrt[3]{(س-2س^2-1)^4} \right]_{1}^{-1} = -\frac{3}{4} \left(\sqrt[3]{(-1-2-1)^4} - \sqrt[3]{(1-2-1)^4} \right) =$

$-\frac{3}{4} \left(\sqrt[3]{256} - \sqrt[3]{16} \right)$.

٤) $\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt[5]{س+1}} \, دس =$

$\int_{0}^{3} \frac{1}{(1+س)^{\frac{1}{5}}} \, دس = \int_{0}^{3} (1+س)^{-\frac{1}{5}} \, دس$

$= \left[\frac{(1+س)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} \right]_{0}^{3}$

$= \frac{5}{4} \left[\sqrt[5]{(1+س)^4} \right]_{0}^{3}$

$= \frac{5}{4} \left(\sqrt[5]{256} - \sqrt[5]{1} \right) = \frac{5}{4} \left(\sqrt[5]{256} - 1 \right) \frac{1}{4}$

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

١) $\int (أس + ب)^{ن}\, دس$ ، حيث أ، ب ثابتان، أ $\neq$ ٠، ن $\neq$ −١

٢) $\int جتا(أس + ب)\, دس$ ، حيث أ، ب ثابتان، أ $\neq$ ٠

الحل

١) $\int (أس + ب)^{ن}\, دس = \dfrac{(أس+ب)^{ن+١}}{(ن+١) \times أ} + جـ$

٢) $\int جتا(أس + ب)\, دس = \dfrac{جا(أس+ب)}{أ} + جـ$

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

١) $\int_{-١}^{٢} ٦(١ - ٢س)^{٥}\, دس$ ٢) $\int ١٢ جا(١ - ٤س)\, دس$

الحل

١) $\left[\dfrac{\cancel{٦}(١-٢س)^{٦}}{\cancel{٦} \times -٢}\right]_{-١}^{٢} = \dfrac{(١-٢\times٢)^{٦}}{-٢} - \dfrac{(١-٢\times-١)^{٦}}{-٢} = \dfrac{(-٣)^{٦} - (٣)^{٦}}{-٢} =$ صفر

٢) $\int ١٢ جا(١-٤س)\, دس = \dfrac{-١٢}{-٤} جتا(١-٤س) + جـ$

$= ٣ جتا(١-٤س) + جـ$