

## إجابات تدريبات الدرس

### التكامل بالتعويض

#### تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي:  $\int (2s^3 + 4s^2) ds$

#### الحل

$$\text{نفرض أن } s = u$$

$$3s^2 + 4s = \frac{ds}{du}$$

$$ds = \frac{ds}{du} \cdot du$$

$$\int (2s^3 + 4s^2) ds = \int (2u^3 + 4u^2) \frac{ds}{du} du$$

$$\int (2u^3 + 4u^2) du = \frac{2u^4}{4} + \frac{4u^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{2} u^4 + \frac{4}{3} u^3 + C$$

تدريب ٢

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.  
جد قيمة التكامل الآتي:

$$(٤) \int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx$$

الحل

$$0 = \frac{dx}{\sqrt{5x}} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5x} = u$$

$$\cdot \quad dx = \frac{2\sqrt{5x}}{5} \Leftrightarrow$$

$$\text{عندما } u = 3 \leftarrow dx = \frac{2\sqrt{5 \times 3}}{5} = \frac{2\sqrt{15}}{5}$$

$$\text{عندما } u = 1 \leftarrow dx = \frac{2\sqrt{5 \times 1}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx = \int_1^3 \frac{1}{u} \cdot \frac{2\sqrt{5x}}{5} dx$$

$$= \int_1^3 \frac{2\sqrt{5x}}{5u} dx = \int_1^3 \frac{2\sqrt{5x}}{5(1+\sqrt{5x})} dx$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15} = \frac{2}{15} (1-1) = \frac{2}{15} (1-3) = \frac{2}{15} (-2) = -\frac{4}{15}$$

تدريب ٣

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int 3s^2(s^2 + 1)^{-5} ds$$

$$(2) \int 2s \sqrt{s^2 - 1} ds$$

$$(3) \int (4s - 1) \sqrt{s^2 - 2s - 1} ds$$

$$(4) \int \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} ds$$

الحل

$$(1) \int 3s^2(s^2 + 1)^{-5} ds$$

$$= \int 3s^2 (s^2 + 1)^{-5} ds$$

$$= \int 3s^2 (s^2 + 1)^{-5} ds$$

$$= \int 3s^2 (s^2 + 1)^{-5} ds$$

$$= \int 3s^2 (s^2 + 1)^{-5} ds$$

$$\begin{aligned} u &= s^2 + 1 \\ du &= 2s ds \\ ds &= \frac{du}{2s} \end{aligned}$$

(٤)  $\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \\ du &= 2x dx \end{aligned}$$

$\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$= \int \frac{u + 1}{u} du$

$= \int \frac{u}{u} + \frac{1}{u} du$

$= \int 1 + \frac{1}{u} du$

$= u + \ln|u| + C$

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \\ du &= 2x dx \end{aligned}$$

$= \int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{u + 1}{u} du = \int 1 + \frac{1}{u} du = u + \ln|u| + C$

$= x^2 - 1 + \ln|x^2 - 1| + C$

$= \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{1}{4} \sqrt{x^2 - 1} \right]_{-1}^1 = \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \sqrt{0} \right) - \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \sqrt{0} \right) = \frac{2}{3}$

$= \frac{1}{1 + \sqrt{1 + u}}$

$\int \frac{1}{1 + \sqrt{1 + u}} du = \int \frac{1}{\sqrt{1 + u}} du$

$= \int \frac{1}{\sqrt{1 + u}} du = 2\sqrt{1 + u} + C$

$= 2\sqrt{1 + x^2} + C$

$= \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \sqrt{1 - 1} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$

**تدريب ٤**

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (أس + ب)^\theta دس ، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0 ، ن \neq 1$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس ، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0$$

**الحل**

$$(1) \int (أس + ب)^\theta دس = دس \frac{(أس + ب)^{\theta + 1}}{\theta + 1} - \frac{أ}{\theta + 1} \int (أس + ب)^{\theta + 1} دس$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس = دس جتا(أس + ب) + \frac{1}{أ} \int جتا(أس + ب) دس$$

**تدريب ٥**

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int \frac{1}{(أس^2 - 1) دس} دس$$

$$(2) \int \frac{1}{(أس^4 - 1) دس} دس$$

**الحل**

$$(1) \int \frac{1}{(أس^2 - 1) دس} دس = \int \frac{1}{(أس^2 - 1) دس} دس = \int \frac{1}{(أس^2 - 1) دس} دس = \int \frac{1}{(أس^2 - 1) دس} دس$$

$$(2) \int \frac{1}{(أس^4 - 1) دس} دس = \int \frac{1}{(أس^4 - 1) دس} دس = \int \frac{1}{(أس^4 - 1) دس} دس$$