

إجابات تدريبات الدرس

التكامل بالتعويض

تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي: $\int (2s^3 + 4s^2) ds$

الحل

$$\text{نفرض أن } s = u$$

$$ds = du$$

$$ds = du$$

$$\int (2u^3 + 4u^2) du = \frac{2u^4}{4} + \frac{4u^3}{3} + C$$

$$\int (2s^3 + 4s^2) ds = \frac{2s^4}{4} + \frac{4s^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{2}s^4 + \frac{4}{3}s^3 + C$$

تدريب ٢

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.
جد قيمة التكامل الآتي:

$$(٤) \int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx$$

الحل

$$0 = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5x} = u$$

$$\cdot \quad dx = \frac{dx}{5}$$

$$\text{عندما } u = 3 \leftarrow x = 1$$

$$\text{عندما } u = 1 \leftarrow x = 0$$

$$\int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx = \int_1^3 \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{5} du$$

$$= \frac{1}{5} \int_1^3 \frac{1}{u} du$$

$$= \frac{1}{5} (\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{5} \ln 3$$

تدريب ٣

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$(2) \int 2s \sqrt{1-s^2} ds$$

$$(3) \int (4s-1) \sqrt{1-2s^2} ds$$

$$(4) \int \frac{1}{\sqrt{1+s}} ds$$

الحل

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$= \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$= \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$= \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$= \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$\begin{aligned} u &= 1+s^2 \\ du &= 2s ds \\ ds &= \frac{du}{2s} \end{aligned}$$

(٤) $\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \\ du &= 2x dx \end{aligned}$$

$\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$= \int \frac{u + 1}{u} du$

$= \int \frac{u}{u} + \frac{1}{u} du$

$= \int 1 + \frac{1}{u} du$

(٣) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\begin{aligned} u &= 1 - x^2 \\ \frac{du}{dx} &= -2x \\ du &= -2x dx \end{aligned}$$

$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{-1}{2x} dx$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{-2x} = \frac{1}{4} \int \frac{du}{\sqrt{u}}$

$= \frac{1}{4} \left[\sqrt{u} \right] = \frac{1}{4} \left[\sqrt{1-x^2} \right] + C$

(٤) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$

$= \int \frac{1}{1+u} du = \ln|1+u| + C$

$= \ln|1+x^2| + C$

$= \ln|1+x^2| + C$

$= \ln|1+x^2| + C$

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (أس + ب)^\theta دس، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0، ن \neq 1$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0$$

الحل

$$(1) \int (أس + ب)^\theta دس = \frac{(أس + ب)^{\theta+1}}{(\theta+1)أ} + ج$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس = \frac{جنا(أس + ب)}{أ} + ج$$

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int \frac{1}{(أس + ب)^\theta} دس$$

$$(2) \int \frac{1}{(أس + ب)^\theta} دس$$

الحل

$$(1) \int \frac{1}{(أس + ب)^\theta} دس = \frac{(أس + ب)^{1-\theta}}{(1-\theta)أ} + ج$$

$$(2) \int \frac{1}{(أس + ب)^\theta} دس = \frac{جنا(أس + ب)^{1-\theta}}{أ(1-\theta)} + ج$$