

إجابات تدريبات الدرس

التكامل بالتعويض

تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي: $\int (2s^3 + 4s^2) ds$

الحل

$$\text{نفرض أن } s = u$$

$$3s^2 + 4s = \frac{ds}{du}$$

$$ds = \frac{ds}{du} \cdot du$$

$$\int (2s^3 + 4s^2) ds = \int (2u^3 + 4u^2) \frac{ds}{du} du$$

$$\int (2u^3 + 4u^2) du = \frac{2u^4}{4} + \frac{4u^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{2} (2s^4 + 4s^3) + C$$

تدريب ٢

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.
جد قيمة التكامل الآتي:

$$(٤) \int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx$$

الحل

$$0 = \frac{5x}{5} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5x} = 0$$

$$\cdot \sqrt{5x} = -1$$

$$\text{عندما } \sqrt{5x} = 3 \leftarrow 16 = 1 + 3 \times 5 = 16$$

$$\text{عندما } \sqrt{5x} = 1 \leftarrow 1 = 1 + 1 \times 5 = 6$$

$$\int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx = \frac{1}{5} \int_6^{16} \frac{1}{u} du$$

$$= \frac{1}{5} \left[\ln|u| \right]_6^{16} = \frac{1}{5} (\ln 16 - \ln 6)$$

$$= \frac{1}{5} \ln \frac{16}{6} = \frac{1}{5} \ln \frac{4}{3}$$

تدريب ٣

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int 3x^2(1+x^2)^{-5} dx$$

$$(2) \int 2x \sqrt{1-x^2} dx$$

$$(3) \int (4-x)(1-\sqrt{x^2-2x-1}) dx$$

$$(4) \int \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx$$

الحل

$$(1) \int 3x^2(1+x^2)^{-5} dx$$

$$\begin{aligned} u &= 1+x^2 \\ du &= 2x dx \\ x dx &= \frac{du}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int 3x^2 u^{-5} \cdot \frac{du}{2} \\ &= \frac{3}{2} \int u^{-5} du \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{u^{-4}}{-4} \right) + C = -\frac{3}{8} \frac{1}{(1+x^2)^4} + C$$

$$= -\frac{3}{8} \frac{1}{(1+x^2)^4} + C$$

(٤) $\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \\ du &= 2x dx \end{aligned}$$

$\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$= \int \frac{u + 1}{u} du$

$= \int \left(\frac{u}{u} + \frac{1}{u} \right) du$

$= \int \left(1 + \frac{1}{u} \right) du$

(٣) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\begin{aligned} u &= 1 - x^2 \\ \frac{du}{dx} &= -2x \\ du &= -2x dx \end{aligned}$$

$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{-1}{2x} dx$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{-2x} = \frac{1}{4} \int \frac{du}{\sqrt{u}}$

$= \frac{1}{4} \left[\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{2} \sqrt{u}$

$= \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} + C$

(٤) $\int \frac{1}{(1+x)^2} dx$

$= \int (1+x)^{-2} dx$

$= \frac{(1+x)^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{1+x}$

$= -\frac{1}{1+x} + C$

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (أس + ب)^\theta دس ، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0 ، ن \neq 1$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس ، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0$$

الحل

$$(1) \int (أس + ب)^\theta دس = دس \frac{(أس + ب)^{\theta+1}}{(\theta+1)أ} + \frac{(أس + ب)^{\theta+1}}{أ} + C$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس = دس جتا(أس + ب) + \frac{1}{أ} \ln |أس + ب| + C$$

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (أس^2 - 1) دس$$

$$(2) \int 12جا(أس^4 - 1) دس$$

الحل

$$(1) \int (أس^2 - 1) دس = \frac{أس^3}{3} - س + C$$

$$(2) \int 12جا(أس^4 - 1) دس = 3جا(أس^4 - 1) + C$$