

## إجابات أسئلة الدرس

### التكامل بالتعويض

(١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

(أ)  $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$  (ب)  $\int 6s^2 \sqrt{2s-2} ds$

(ج)  $\int (2s-2s^3) \sqrt{2s-2} ds$  (د)  $\int \frac{9-s^3}{(s^2-2s)^2} ds$

### الحل

(أ)  $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$

ص =  $s-2$  ⇒  $ds = \frac{ds}{1}$  ⇒  $1-2s = 1-2(v+2) = 1-2v-4 = -2v-3$

$\int (-2v-3)v^4 \frac{dv}{1} = \int (-2v^5-3v^4) dv = -\frac{2v^6}{6} - \frac{3v^5}{5} + C = -\frac{v^6}{3} - \frac{3v^5}{5} + C$

$= -\frac{(s-2)^6}{3} - \frac{3(s-2)^5}{5} + C$

(ب)  $\int 6s^2 \sqrt{2s-2} ds$

ص =  $2s-2$  ⇒  $ds = \frac{ds}{2}$  ⇒  $2s-2 = v$  ⇒  $s = \frac{v+2}{2}$

$\int 6\left(\frac{v+2}{2}\right)^2 \sqrt{v} \frac{dv}{2} = \int \frac{3}{2}(v+2)^2 v^{1/2} dv = \frac{3}{2} \int (v^2+4v+4)v^{1/2} dv$

$$p + \frac{u}{\sqrt{u}} = p + \frac{u^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$p + \frac{\sqrt{u}}{u} =$$

$$p + \frac{\sqrt{2-3x}}{u} =$$

(ج)  $\int (2-3x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2-3x}{-3} \cdot \frac{2}{3} + C$

ص =  $2-3x$   $\Rightarrow \frac{dv}{dx} = -3$

$\therefore dx = \frac{dv}{-3}$

$\int \frac{dv}{-3} = \frac{v}{-3} + C$

$= -\frac{2-3x}{3} + C$

$= -\frac{2}{3} + x + C$

(د)  $\int \frac{9-x^2}{(x^2-6)^2} dx$

ص =  $x^2-6$   $\Rightarrow \frac{dv}{dx} = 2x$

$\therefore dx = \frac{dv}{2x}$

$= \int \frac{9-x^2}{(x^2-6)^2} \cdot \frac{dv}{2x}$

$= \int \frac{9-x^2}{(x^2-6)^2} \cdot \frac{dv}{2x}$

$p + \frac{1}{-1} x^{-1} = p + \frac{1+x}{1+x}$

$p + \frac{x^2}{(x^2-6)^2} = p + \frac{x^2}{u^2}$

(٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(أ)  $\int \sqrt{(2-s)^2} ds$   
 (ب)  $\int (1-s)(1-2s^2-s^4) ds$   
 (ج)  $\int 2 \sqrt{2-s} ds$   
 (د)  $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds$

**الحل**

(أ)  $\int \sqrt{(2-s)^2} ds = \int (2-s) ds = 2s - \frac{s^2}{2} + C$

(ب)  $\int (1-s)(1-2s^2-s^4) ds = \int (1-s-2s^3+2s^4-s^5+s^6) ds = s - \frac{s^2}{2} - \frac{2s^4}{4} + \frac{2s^5}{5} - \frac{s^6}{6} + \frac{s^7}{7} + C$

(ج)  $\int 2 \sqrt{2-s} ds = 2 \int (2-s)^{1/2} ds = 2 \cdot \frac{2(2-s)^{3/2}}{-3/2} = -\frac{8}{3} (2-s)^{3/2} + C$

(د)  $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \int 2s^2 (1+s^4)^{1/2} ds$   
 Let  $u = 1+s^4$ , then  $du = 4s^3 ds$   
 $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{1}{3} (1+s^4)^{3/2} + C$

(ج)  $\int 2 \sqrt{2-s} ds = 2 \int (2-s)^{1/2} ds = 2 \cdot \frac{2(2-s)^{3/2}}{-3/2} = -\frac{8}{3} (2-s)^{3/2} + C$

(د)  $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \int 2s^2 (1+s^4)^{1/2} ds$   
 Let  $u = 1+s^4$ , then  $du = 4s^3 ds$   
 $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{1}{3} (1+s^4)^{3/2} + C$

(ج)  $\int 2 \sqrt{2-s} ds = 2 \int (2-s)^{1/2} ds = 2 \cdot \frac{2(2-s)^{3/2}}{-3/2} = -\frac{8}{3} (2-s)^{3/2} + C$

(د)  $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \int 2s^2 (1+s^4)^{1/2} ds$   
 Let  $u = 1+s^4$ , then  $du = 4s^3 ds$   
 $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{1}{3} (1+s^4)^{3/2} + C$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ)  $\int \sqrt{4s+1} ds$

ب)  $\int s^3(s^2-1) ds$

ج)  $\int s^2 \sqrt{s^2-1} ds$

د)  $\int \frac{s^2-3}{(s^3-2)s} ds$

**الحل**

أ)  $\int \sqrt{4s+1} ds = \int (4s+1)^{\frac{1}{2}} ds$

$$\int (4s+1)^{\frac{1}{2}} ds = \int \frac{(4s+1)^{\frac{1}{2}}}{4 \times \frac{1}{2}} ds = \int \frac{(4s+1)^{\frac{1}{2}}}{2} ds$$

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{4s+1} ds$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} (4s+1)^{\frac{3}{2}} \right] + C$$

$$= \frac{1}{3} (4s+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

منهاجي  
متعة التعليم الهادف

منهاجي  
متعة التعليم الهادف

منهاجي  
متعة التعليم الهادف

منهاجي  
متعة التعليم الهادف

منهاجي  
متعة التعليم الهادف

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x}$$

$$(ب) \int_{-1}^1 \frac{1}{2x-1} dx = \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x} \right) dx = \text{مفرد}$$

$$(ج) \int_{-1}^1 \frac{1}{2x-1} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2x-1} dx$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2x-1} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2x-1} dx$$

$$\text{هـ} = 1 - \frac{1}{2x} \Leftrightarrow \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2x} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2x} dx$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2x} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2x} dx$$

$$\frac{1}{2} \left[ \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1-1} - \sqrt{1+1} - \left( \sqrt{1-(-1)} - \sqrt{1+(-1)} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} & \left( \sqrt[3]{-1} - \sqrt[3]{1} \right) \frac{x}{2} \\ & \left( -1 - 1 \right) \frac{x}{2} \\ & \frac{x}{2} = 1 \times \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{(x^3 - 6)^2} dx$$

$$u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow 3 - u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow x^3 - 6 = 3 - u$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{(3-u)^2} du = \int_1^2 \frac{1}{(3-u)^2} du$$

$$\int_1^2 \frac{1}{(3-u)^2} du = \int_1^2 \frac{1}{(3-u)^2} du = \int_1^2 \frac{1}{(3-u)^2} du$$

$$\frac{1}{2-1} - \frac{1}{3-1} = \frac{1}{1 \times 3 - 6} - \frac{1}{2 \times 3 - 6} = \int_1^2 \frac{1}{(3-u)^2} du$$

٤) إذا علمت أن ق(٨) = ٥، ق(٢٧) = ٦، فجد قيمة التكامل الآتي:  $\int_2^3 \frac{1}{(3x^2 - 6)^2} dx$

**الحل**

$$u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow 3 - u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow x^3 - 6 = 3 - u$$

$$\int_2^3 \frac{1}{(3x^2 - 6)^2} dx = \int_2^3 \frac{1}{(3 - u)^2} du = \int_2^3 \frac{1}{(3 - u)^2} du$$

(٥) إذا علمت أن  $\int_0^2 (س) دس = ٣$ ، فجد قيمة التكامل الآتي:  $\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس$

**الحل**

$$٨س = ٨(٢س - ١) \Leftrightarrow ٨س = ١٦س - ٨ \Leftrightarrow ٨ = ٨س - ٨س + ٨ \Leftrightarrow ٨ = ٨(س - ١) \Leftrightarrow ١ = س - ١ \Leftrightarrow س = ١ + ١ = ٢$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس = \int_{-1}^2 ٨(٢س - ١) دس = \int_{-1}^2 (١٦س - ٨) دس$$

$$عند س = ٢ = ١٦(٢) - ٨(٢) = ٣٢ - ١٦ = ١٦$$

$$عند س = -١ = ١٦(-١) - ٨(-١) = -١٦ + ٨ = -٨$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس = \int_{-1}^2 (١٦س - ٨) دس = ٨س٢ - ٨س \Big|_{-1}^2 = ٨(٤) - ٨(٢) - (٨(١) - ٨(-١)) = ٣٢ - ١٦ - ٨ + ٨ = ١٦$$

منهاجي  
متعة التعليم الهادف

منهاجي  
متعة التعليم الهادف

(٦) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.  
جد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_0^2 ٢س \sqrt{٩ + ٢س} دس$$

**الحل**

$$\int_0^2 ٢س \sqrt{٩ + ٢س} دس = \int_0^2 (٢س - ٩ + ٩) \sqrt{٩ + ٢س} دس$$

$$= \int_0^2 (٢س - ٩) \sqrt{٩ + ٢س} دس + \int_0^2 ٩ \sqrt{٩ + ٢س} دس$$

$$= \int_0^2 (٢س - ٩) \sqrt{٩ + ٢س} دس + ٩ \int_0^2 \sqrt{٩ + ٢س} دس$$

$$\int_0^2 (٢س - ٩) \sqrt{٩ + ٢س} دس = \int_0^2 \frac{١ + \frac{١}{٢}}{١ + \frac{١}{٢}} (٢س - ٩) \sqrt{٩ + ٢س} دس = \int_0^2 \frac{١ + \frac{١}{٢}}{١ + \frac{١}{٢}} (٢س - ٩) \sqrt{٩ + ٢س} دس$$

$$= \int_0^2 \frac{١ + \frac{١}{٢}}{١ + \frac{١}{٢}} (٢س - ٩) \sqrt{٩ + ٢س} دس = \int_0^2 \frac{١ + \frac{١}{٢}}{١ + \frac{١}{٢}} (٢س - ٩) \sqrt{٩ + ٢س} دس$$

$$= \left( \frac{٢}{٣} \sqrt{٩ + ٢س} - \frac{١}{٣} \sqrt{٩ + ٢س} \right) \Big|_0^2 = \left( \frac{٢}{٣} \sqrt{١٧} - \frac{١}{٣} \sqrt{١٧} \right) - \left( \frac{٢}{٣} \sqrt{٩} - \frac{١}{٣} \sqrt{٩} \right)$$

$$= \frac{١}{٣} \sqrt{١٧} - \frac{١}{٣} \sqrt{٩} = \frac{١}{٣} (\sqrt{١٧} - ٣) = \frac{١}{٣} (\sqrt{١٧} - ٣)$$

منهاجي  
متعة التعليم الهادف

منهاجي  
متعة التعليم الهادف