

## إجابات أسئلة الدرس

### التكامل بالتعويض

(١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

(أ)  $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$  (ب)  $\int 6s^2 \sqrt{(2-2s)^2} ds$

(ج)  $\int (2s-2s^3) \sqrt{(s^2-2s)^2} ds$  (د)  $\int \frac{9-s^3}{(s^2-2s)^2} ds$

### الحل

(أ)  $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$

ص =  $s-2 \Rightarrow ds = 1 ds$   $\Rightarrow ds = \frac{ds}{1} = ds$

$\int (1-2s)(s-2)^4 ds = \int (1-2(s-2)) (s-2)^4 ds$

$= \int (1-2s+4) (s-2)^4 ds = \int (5-2s) (s-2)^4 ds$

(ب)  $\int 6s^2 \sqrt{(2-2s)^2} ds$

ص =  $2-2s \Rightarrow ds = -1 ds \Rightarrow ds = \frac{ds}{-1} = -ds$

$\int 6s^2 \sqrt{(2-2s)^2} ds = \int 6s^2 (2-2s) ds$

$$p + \frac{u}{\sqrt{u}} = p + \frac{u^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$p + \frac{\sqrt{u}}{u} =$$

$$p + \frac{\sqrt{2-3x}}{u} =$$

(ج)  $\int (2-3x)^{-\frac{1}{2}} dx$

$$ص = 2 - 3x \Rightarrow \frac{ص}{3} = 2 - x$$

$$\cdot \frac{ص}{3} = \frac{ص}{3}$$

$$\frac{ص}{3} \int (2-3x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$\int -\frac{ص}{3} (2-3x)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= -\frac{ص}{3} (2-3x)^{\frac{1}{2}}$$

(د)  $\int \frac{9-x^2}{(x^2-6)^2} dx$

$$\Leftrightarrow 6 - x^2 = \frac{ص}{3} \Leftrightarrow 6 - x = \frac{ص}{3}$$

$$\cdot \frac{ص}{3} = \frac{ص}{3}$$

$$= \frac{ص}{3} \times \frac{9-x^2}{(x^2-6)^2}$$

$$= \frac{ص}{3} \times \frac{ص}{3} \times \frac{(3-x)^2}{(3-x)^2}$$

$$p + \frac{1}{\sqrt{u}} = p + \frac{1+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$p + \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = p + \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}$$

(٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(أ)  $\int \sqrt{(2-s)^2} ds$   
 (ب)  $\int (1-s)(1-2s^2-s^4+s^6) ds$   
 (ج)  $\int 2 \sqrt{2-s} ds$   
 (د)  $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds$

**الحل**

(أ)  $\int \sqrt{(2-s)^2} ds = \int (2-s) ds = 2s - \frac{1}{2}s^2 + C$

(ب)  $\int (1-s)(1-2s^2-s^4+s^6) ds = \int (1-s-2s^3+2s^4-s^5+s^7) ds = s - \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s^4 + \frac{2}{5}s^5 - \frac{1}{6}s^6 + \frac{1}{8}s^8 + C$

(ج)  $\int 2 \sqrt{2-s} ds = 2 \int (2-s)^{1/2} ds = 2 \cdot \frac{2}{3} (2-s)^{3/2} + C = \frac{4}{3} (2-s)^{3/2} + C$

(د)  $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds$   
 حل:  $u = 1+s^4 \Rightarrow du = 4s^3 ds \Rightarrow s^3 ds = \frac{1}{4} du$   
 $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \int 2s^2 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{4} du = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{1}{3} (1+s^4)^{3/2} + C$

(ج)  $\int \sqrt{2-s} ds = \frac{2}{3} (2-s)^{3/2} + C$

(د)  $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \frac{1}{3} (1+s^4)^{3/2} + C$

(أ)  $\int \sqrt{(2-s)^2} ds = \int (2-s) ds = 2s - \frac{1}{2}s^2 + C$

(ب)  $\int (1-s)(1-2s^2-s^4+s^6) ds = \int (1-s-2s^3+2s^4-s^5+s^7) ds = s - \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s^4 + \frac{2}{5}s^5 - \frac{1}{6}s^6 + \frac{1}{8}s^8 + C$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ)  $\int \sqrt{4s+1} ds$

ب)  $\int \frac{3s^2(s-1)^2 ds}{s^2}$

ج)  $\int \frac{2s^2 \sqrt{s^2-1} ds}{s}$

د)  $\int \frac{s^2-3}{s^2(s^2-3)} ds$

**الحل**

أ)  $\int \sqrt{4s+1} ds = \int \sqrt{4(s+\frac{1}{4})} ds$

$$= \int \frac{1+\frac{1}{4}}{4 \times \frac{1}{4}} ds = \int \frac{(1+s \cdot \frac{1}{4})}{4 \times \frac{1}{4}} ds$$

$$= \int \frac{\sqrt{1+s \cdot \frac{1}{4}}}{1} ds$$

$$= \frac{2}{3} \left[ \sqrt{1+s \cdot \frac{1}{4}} - \sqrt{1+s \cdot \frac{1}{4}} \right] + C$$

$$= \frac{2}{3} (16 - 9) + C$$

$$\frac{1}{x} (1 - 2x) = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 2x + \frac{1}{3}$$

$$(ب) \int_{-1}^1 x^2 (1 - x^2) dx = \text{مساحة}$$

$$(ج) \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx =$$

$$\int_{-1}^1 x^2 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\text{هنا } 1 - x^2 = \frac{1 - x^2}{1 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1 - x^2}{1 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = 1 - x^2$$

$$\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{1 - x^2}{1 + \frac{1}{2}}$$

$$\frac{2}{3} \left[ \sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - x^2}{1 + \frac{1}{2}} \right| \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} \left( \sqrt{1 - 1} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - 1}{1 + \frac{1}{2}} \right| \right)$$

$$\left( \sqrt[3]{-1} - \sqrt[3]{1} \right) \frac{x}{2}$$

$$\left( -1 - 1 \right) \frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2} = 1 \times \frac{x}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx = \int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx \cdot \frac{1}{1}$$

$$u = \frac{x^3}{3} \Leftrightarrow 3 - u = \frac{x^3}{3} \Leftrightarrow x^3 - 6 = 3 - u$$

$$= \int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx = \int_1^2 \frac{x^2}{(x^3 - 6)^2} dx - \int_1^2 \frac{2}{(x^3 - 6)^2} dx$$

$$\int_1^2 \frac{1}{u} = \int_1^2 \frac{1}{1-u} = \int_1^2 \frac{1}{1+u}$$

$$\frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1-u^2} - \frac{1}{1+u} = \int_1^2 \frac{1}{x^3 - 6}$$

$$\text{مفر} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} =$$

٤) إذا علمت أن ق(٨) = ٥، ق(٢٧) = ٦، فجد قيمة التكامل الآتي:  $\int_2^3 \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{x} dx$

**الحل**

$$u = \frac{x^3}{3} \Leftrightarrow 3u = x^3 \Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{3}{x^3} = \frac{3}{3u} = \frac{1}{u}$$

$$\int_2^3 \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_2^3 \frac{1}{u} du = \int_2^3 \frac{1}{u} du$$

$$= \ln(u) \Big|_2^3 = \ln(3) - \ln(2) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

(٥) إذا علمت أن  $\int_0^2 (س) دس = ٣$ ، فجد قيمة التكامل الآتي:  $\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس$

**الحل**

$$٥س = س٢ + ١ \Leftrightarrow س٢ = ٥س - ١ \Leftrightarrow دس = \frac{٥س}{٢س} = \frac{٥}{٢}$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس = \int_{-1}^2 ٨س ق(٥س - ١) دس$$

$$\text{عند } س = -١ \Rightarrow س٢ = ٥(-١) - ١ = -٦ \Rightarrow ٢ = ١ + (-٦)$$

$$\text{عند } س = ٢ \Rightarrow س٢ = ٥(٢) - ١ = ٩ \Rightarrow ٥ = ١ + ٩$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس = \int_{-1}^2 ٨س ق(٥س - ١) دس = ٣ - ٨٤ = ١٢$$

(٦) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.  
جد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_0^2 ٢س \sqrt{٩ + س٢} دس$$

**الحل**

$$\int_0^2 ٢س \sqrt{٩ + س٢} دس = \int_0^2 (٩ + س٢) دس$$

$$\Leftrightarrow ٥س = ٩ + س٢ \Leftrightarrow دس = \frac{٥س}{٢س} = \frac{٥}{٢}$$

$$\int_0^2 ٢س \sqrt{٩ + س٢} دس = \int_0^2 (٩ + س٢) دس$$

$$\int_0^2 (٩ + س٢) دس = \int_0^2 \frac{٩ + س٢}{١ + س٢} دس = \int_0^2 \frac{٩ + س٢ + ١ - ١}{١ + س٢} دس = \int_0^2 \left( \frac{١٠}{١ + س٢} - \frac{١}{١ + س٢} \right) دس$$

$$= \int_0^2 \left( \frac{١٠}{١ + س٢} - \frac{١}{١ + س٢} \right) دس$$

$$= \left( \frac{١٠}{٣} \sqrt{١ + س٢} - \frac{١}{٣} \sqrt{١ + س٢} \right) \Big|_0^2 = \left( \frac{١٠}{٣} \sqrt{٥} - \frac{١}{٣} \sqrt{٥} \right) - \left( \frac{١٠}{٣} \sqrt{١} - \frac{١}{٣} \sqrt{١} \right) = \frac{١٩\sqrt{٥}}{٣} - \frac{٩}{٣} = \frac{١٩\sqrt{٥} - ٩}{٣}$$