أتدرب وأحل المسائل

الأسئلة (1 - 20)

الاشتقاق

أبحث قابلية اشتقاق كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

(1) f(x)=|x−5|, x=5

f′(5)=limh→0f(5+h)−f(5)h=limh→0|(5+h)−5|−0h=limh→0|h|hf+′(5)
=limh→0+hh=1f−′(5)=limh→0−−hh=−1

بما أن النهايتين من اليمين واليسار غير متساويتين، فإن $f'(5)$ غير موجودة، أي أنّ f غير قابل للاشتقاق عند $x = 5$

(2) f(x)=x2/5, x=0

f′(0)=limh→0f(0+h)−f(0)h=limh→0(h)25−0h=limh→0h25h=limh→0
1h35f+′(0)=∞f−′(0)=−∞

$f'(0)$ غير موجودة، إذن f غير قابل للاشتقاق عند $x = 0$

(3) f(x)={x2, x≤1x2−2x, x>1, x=1

f+′(1)=limh→0f(1+h)−f(1)h=limh→0(1+h)2−2(1+h)−1h=limh→01
+2h+h2−2−2h−1h=limh→0h2−2h=−∞

f+′(1) غير موجودة، إذن f غير قابل للاشتقاق عند $x = 1$

(4) f(x)=3x, x=4

f′(4)=limh→0f(4+h)−f(4)h=limh→03+h4+34h=limh→012−12−3h4
h(4+h)=limh→0−34(4+h)=−316

$f'(4)$ غير موجودة، إذن f قابل للاشتقاق عند $x = 4$

(5) f(x)=(x−6)2/3, x=6

f′(6)=limh→0f(6+h)−f(6)h=limh→0(6+h−6)23−0h=limh→0(h)23h=

limh→01h13f+′(6)=∞f−′(6)=−∞

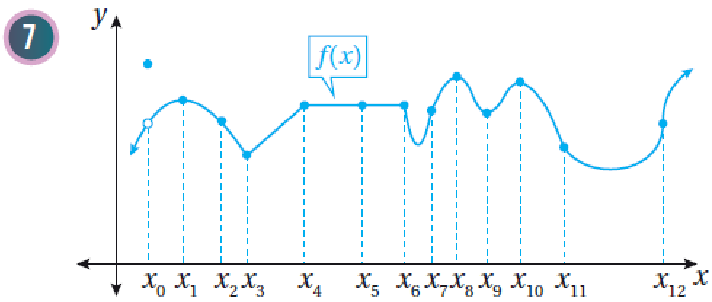
$x = 6$ غير قابل للاشتقاق عند f غير موجودة، إذن $f\ '(6)$

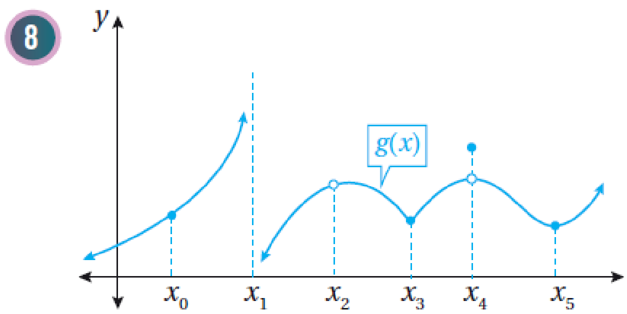
(6) f(x)={x+1, x≠43, x=4, x=4

f′(4)=limh→0f(4+h)−f(4)h=limh→04+h+1−3h=limh→0h+2hf+′(4)=∞f−′(4)=−∞

$f\ '(4)$ غير موجودة، إذن f غير قابل للاشتقاق عند $x = 4$

أحدد قيم x للنقاط التي لا يكون عندها كلّ اقتران ممّا يأتي قابلاً للاشتقاق، مبرراً إجابتي:





(7) الاقتران f غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_6$, $x = x_4$, $x = x_3$ ؛ لأن لمنحنى رأس حاد أو زاوية عند هذه النقاط.

وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_0$ ؛ لأنه غير متصل عندها،

وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_{12}$ ؛ نظراً لوجود مماس رأسي عند هذه النقطة.

(8) الاقتران g غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_3$؛ لأن لمنحنى زاوية عند هذه النقطة.

وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_0$ ؛ لأنه غير متصل عندها،

وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_1, x = x_2, x = x_4$ ؛ لأنه غير متصل عندها.

أحدد قيمة (قيم) x التي لا يكون عندها كلّ اقتران ممّا يأتي قابلاً للاشتقاق:

(9) f(x)=x−8x2−4x−5

f اقتران نسبي منحناه متصل وأملس عند جميع نقاطه باستثناء أصفار مقامه،

x2−4x−5=0→(x−5)(x+1)=0→x=5 or x=−1

f غير متصل عند $x = -1$, $x = 5$ إذن غير قابل للاشتقاق عندها.

(10) f(x)=3x−63+5

f(x)=3x−63f′(x)=13(3x−6)−23(3)=1(3x−6)23

غير قابل للاشتقاق f الحقيقية عدا أصفار مقامها، إذن x موجودة عند جميع قيم (x) ‘ f
عند $x = 2$

(11) f(x)=|x2−9|

f(x)=|x2−9|={9−x2,−3<x<3x2−9,x≤−3 or x≥3

نبحث قابلية الاشتقاق عند $x = 3$ و $x = -3$:

f′(3)=limh→0f(3+h)−f(3)h=limh→0|(3+h)2−9|−0h=limh→0|6h+h2|hf+′(3)=limh→0+6h+h2h=limh→0+(6+h)=6f−′(3)=limh→0−−6h−h2h=limh→0−(−6−h)=−6

بما أن النهايتين من اليمين واليسار غير متساويتين فإن f′(3) غير موجودة أي أن f غير قابل للاشتقاق عند $x = 3$

f′(−3)=limh→0f(−3+h)−f(−3)h=limh→0|(−3+h)2−9|−0h=limh→0|6h−h2|hf+′(−3)=limh→0+6h−h2h=limh→0+(6−h)=6f−′(−3)=limh→0−−6h+h2h=limh→0−(−6+h)=−6

بما أن النهايتين من اليمين واليسار غير متساويتين فإن f′(-3) غير موجودة أي أن f غير قابل للاشتقاق عند $x = -3$

إذن f غير قابل للاشتقاق عند $x = -3$, $x = 3$

(12) إذا كان: $f(x)=x|x|$ ، فأثبت أنّ $f'(0)$ موجودة.

f(x)=x|x|f′(0)=limh→0f(0+h)−f(0)h=limh→0h|h|−0h=limh→0|h||h|={−h,h<0h,h≥0f+′(0)=limh→0h=0f−′(0)=limh→0(−h)=0

بما أن النهايتين من اليمين واليسار متساويتان، إذن $f'(0)$ موجودة.

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

(13) f(x)=2sin x−ex

f′(x)=2cos x−ex

(14) f(x)=ln x4−π cos x

f′(x)=14x+π sin x

(15) f(x)=ln (1x3)+x4

f(x)=ln (1x3)+x4=ln 1−ln x3+x4=−3ln x+x4f′(x)=−3x+4x3

(16) f(x)=ex+1+1

f(x)=ex+1+1=e×ex+1f′(x)=e×ex=ex+1

(17) f(x)=ex+xe

f′(x)=ex+e xe−1

(18) f(x)=ln (10xn)

f(x)=ln (10xn)=ln 10−ln xn=ln 10−n ln xf′(x)=−n(1x)=−nx

إذا كان: x+12exf(x)=sin ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(19) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة (π , 12eπ).

f′(x)=cos x+12ex

ميل المماس عند النقطة (π , 12eπ) :

f′(π)=cos π+12eπ=−1+12eπ

معادلة المماس عند النقطة (π , 12eπ) :

y−12eπ=(−1+12eπ)(x−π)y=(−1+12eπ)x+π−π2eπ+12eπ

(20) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة (π , 12eπ).

بما أن ميل المماس عند النقطة (π , 12eπ) هو −1+12eπ ، فإن ميل العمودي على المماس هو:

−1−1+12eπ=−2−2+eπ=22−eπ

معادلة العمودي على المماس هي:

y−12eπ=22−eπ(x−π)→y=22−eπx−2π2−eπ+12eπ