أتدرب وأحل المسائل

مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

(1) $f(x)=x32x-1$

$f(x)=x32x-1f'(x)=(2x-1)(3x2)-(x3)(2)(2x-1)2=4x3-3x2(2x-1)2$

(2) $f(x)=x3sec\ x$

$f(x)=x3secxf'(x)=(x3)(secx\ tanx)+(secx)(3x2)=x3secx\ tanx+3x2sec\ x$

(3) $f(x)=x+1cos\ x$

$f(x)=x+1cosxf'(x)=(cosx)(1)-(x+1)(-sinx)(cosx)2=cosx+xsinx+sin\ xcos2x$

(4) $f(x)=ex(tan\ x-x)$

$f(x)=ex(tanx-x)f'(x)=(ex)(sec2x-1)+(tanx-x)(ex)=extan2x+extanx-xex$

(5) $f(x)=sin\ x+cos\ xex$

$f(x)=sinx+cosxexf'(x)=(ex)(cosx-sinx)-(sinx+cosx)(ex)(ex)2=-2si\ nxex$

(6) $f(x)=x3sin\ x+x2cos\ x$

$f(x)=x3sin\ x+x2cos\ xf'(x)=(x3)(cos\ x)+(sin\ x)(3x2)+(x2)(-sin\ x)+(cos\ x)(2x)=x3cos\ x+2x2sin\ x+2xcos\ x$

(7) $f(x)=x3(x+3)$

$f(x)=x3(x+3)=x56+3x13f'(x)=56x-16+x-23=566+1x23$

(8) $f(x)=1+sec\ x1-sec\ x$

$f(x)=\frac{1+\sec x}{1-\sec x}$
$f'(x)=\frac{(1-\sec x)(\sec x\tan x)-(1+\sec x)(-\sec x\tan x)}{(1-\sec x)^2}=\frac{2\sec x\tan x}{(1-\sec x)^2}$

(9) $f(x)=\frac{2-\frac{1}{x}}{x-3}$

$f(x)=\frac{2-\frac{1}{x}}{x-3}=\frac{2x-1}{x^2-3x}$
$f'(x)=\frac{(x^2-3x)(2)-(2x-1)(2x-3)}{(x^2-3x)^2}=\frac{-2x^2+2x-3}{(x^2-3x)^2}$

(10) $f(x)=(x^3-x)(x^2+2)(x^2+x+1)$

$f(x)=(x^3-x)(x^2+2)(x^2+x+1)$
$f'(x)=(x^3-x)((x^2+2)(2x+1)+(x^2+x+1)(2x))+(x^2+2)(x^2+x+1)(3x^2-1)=(x^3-x)(x^2+2)(2x+1)+(x^3-x)(x^2+x+1)(2x)+(x^2+2)(x^2+x+1)(3x^2-1)$

(11) $f(x)=(\csc x+\cot x)^{-1}$

$f(x)=(\csc x+\cot x)^{-1}=\frac{1}{\csc x+\cot x}$
$f'(x)=\frac{-1(-\csc x\cot x-\csc^2 x)}{(\csc x+\cot x)^2}=\frac{\csc x\cot x+\csc^2 x}{(\csc x+\cot x)^2}=\frac{\csc x(\cot x+\csc x)}{(\csc x+\cot x)^2}=\frac{\csc x}{\cot x+\csc x}$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x=0$ ، وكان:

$f(0)=5,\ f'(0)=-3,\ g(0)=-1,\ g'(0)=2$ فأجد كلاً ممّا يأتي:

(12) $(fg)'(0)$

$(fg)'(0)=f(0)g'(0)+g(0)f'(0)=5\times2-1\times-3=13$

(13) $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$

$\left(\frac{f}{g}\right)'(0)=\frac{g(0)f'(0)-f(0)g'(0)}{g^2(0)}=\frac{-1\times-3-5\times2}{(-1)^2}=-7$

(14) $(7f-2fg)'(0)$

$(7f-2fg)'(0)=7f'(0)-2(fg)'(0)=7(-3)-2(13)=-47$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

(15) f(x)=x2−4x2+4 , x=−2

f(x)=x2−4x2+4f′(x)=(x2+4)(2x)−(x2−4)(2x)(x2+4)2=16x(x2+4)2f′′(x)=(x2+4)2(16)−(16x)(2)(x2+4)1(2x)(x2+4)4=(16)(x2+4)−(16x)(2)(2x)(x2+4)3f′′(−2)=(16)(8)−(−32)(2)(−4)(8)3=−14

(16) f(x)=1+x1+x3 , x=8

f(x)=1+x1+x3=(1+x3)(1−x3+x23)1+x3=1−x3+x23f′(x)=−13x−23+23x−13f′′(x)=29x−53−29x−43=29x53−29x43f′′(8)=29853−29843=29(132−116)=−1144

(17) f(x)=11+x , x=4

f(x)=11+xf′(x)=−(12x)(1+x)2=−12x(1+x)2f′′(x)=2x(2)(1+x)1(12x)+(1+x)2(1x)4x(1+x)4=2+1+xx4x(1+x)3f′′(4)=2+1+2216(1+2)3=7864

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

(18) f(x)=1+x1+ex , (0,12)

f(x)=1+x1+exf′(x)=(1+ex)(1)−(1+x)(ex)(1+ex)2=1−xex(1+ex)2

ميل المماس عند النقطة (0, 12) هو: $f'(0$ 14) =

معادلة المماس هي:

y−12=14(x−0)→y=14x+12

(19) f(x)=ex cos x+sin x,(0,1)

f(x)=ex cos x+sin xf′(x)=(ex)(−sin x)+(cos x)(ex)+cos x

ميل المماس عند النقطة (0, 1) هو:

f′(0)=(1)(0)+(1)(1)+1=2

معادلة المماس هي:

$y-1=2(x-0)\rightarrow y=2x+1$

أثبت صحّة كلّ ممّا يأتي معتمداً أنّ $ddx(\cos x)=-\sin x$ ، $ddx(\sin x)=\cos x$:

(20) $ddx(\cot x)=-\csc 2\ x$

$ddx(\cot x)=ddx(\cos x\sin x)=(\sin x)(-\sin x)-(\cos x)(\cos x)\sin 2\ x=-\sin 2\ x-\cos 2\ x\sin 2\ x=-1\sin 2\ x=-\csc 2\ x$

(21) $ddx(\sec x)=\sec x\tan x$

$ddx(\sec x)=ddx(1\cos x)=-(-\sin x)\cos 2\ x=1\cos x\times\sin x\cos x=\sec x\tan x$

(22) $ddx(\csc x)=-\csc x\cot x$

$ddx(\csc x)=ddx(1\sin x)=-(\cos x)\sin 2\ x=-1\sin x\times\cos x\sin x=-\csc x\cot x$

ألاحظ المشتقة المعطاة في كلّ ممّا يأتي، ثم أجد المشتقة العليا المطلوبة:

(23) $f''(x)=2-2x, f'''(x)$

$f''(x)=2-2x f'''(x)=2x2$

(24) $f'''(x)=2x, f(4)(x)$

$f'''(x)=2x f(4)(x)=1x$

(25) $f(4)(x)=2x+1, f(6)(x)$

$f(4)(x)=2x+1 f(5)(x)=2 f(6)(x)=0$

(26) نباتات هجينة: وجد فريق بحث زراعي أنّه يمكن التعبير عن ارتفاع نبتة هجينة من نبات تبّاع الشمس h بالأمتار، باستعمال الاقتران: $h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$ ، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور. أجد معدّل تغير ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن.

$$h(t)=\frac{3t^2}{4+t^2} \quad h'(t)=\frac{(4+t^2)(6t)-(3t^2)(2t)}{(4+t^2)^2}=\frac{24t}{(4+t^2)^2}$$

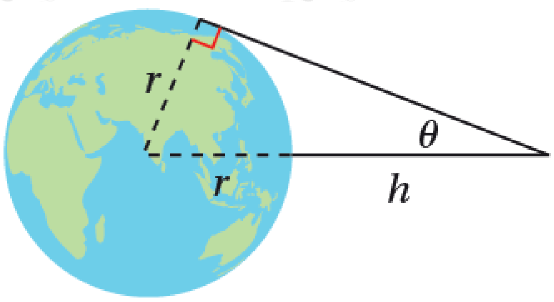
إذا كان الاقتران: $y = e^x \sin x$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(27) أجد $\frac{dy}{dx}$ ، و $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{dy}{dx}=(e^x)(\cos x)+(\sin x)(e^x)=e^x(\cos x+\sin x) \quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^x(-\sin x+\cos x)+e^x(\cos x+\sin x)=2e^x\cos x$$

(28) أثبت أنّ $\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dx}-2y$

$$2\frac{dy}{dx}-2y=2e^x(\cos x+\sin x)-2e^x \sin x=2e^x\cos x=\frac{d^2y}{dx^2}$$



أقمار صناعية: عندما ترصد الأقمار الصناعية الأرض، فإنه يُمكنها مسح جزء فقط من سطح الأرض. وبعض الأقمار الصناعية تحوي مُستشعرات لقياس الزاوية Θ (بالراديان) المبينة في الشكل المجاور. إذا كان h يمثل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومترات، و r يُمثل نصف قطر الأرض بالكيلومترات، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(29) أثبت أنّ $h = r(\csc \Theta - 1)$.

$$\csc\theta=\frac{r+h}{r} \rightarrow r+h=r\csc\theta \rightarrow h=r(\csc\theta-1)$$

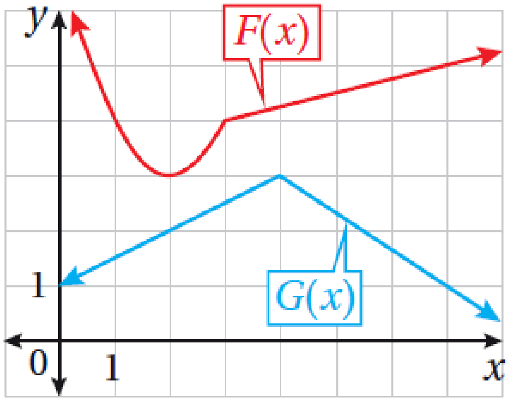
(30) أجد معدل تغير h بالنسبة إلى Θ عندما $\theta=\frac{\pi}{6}\text{rad}$ (أفترض أن $r = 6371$ km).

$$\frac{dh}{d\theta}=r(-\csc\theta\ \cot\theta) \quad \left.\frac{dh}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=6371\left(-\csc\frac{\pi}{6}\ \cot\frac{\pi}{6}\right)=6371(-2\times\sqrt{3})\approx -22070\text{km/rad}$$

(31) إذا كان: f(x)=9ln x+12x2 ، فأثبت أنّ f′(x)=(3x−1)(3x+1)x3 .

f(x)=9lnx+12x2f′(x)=9(1x)+−1(4x)4x4=9x−1x3=9x2−1x3=(3x−1)(3x+1)x3

يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $F(x)$ ، و $G(x)$.



إذا كان: $P(x) = F(x)G(x)$ ، وكان: $Q(x) =$ F(x)G(x) ، فأجد كلاً ممّا يأتي:

(32) $P'(2)$

P′(2)=F(2)G′(2)+G(2)F′(2)

G' (2)) ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (2, 2) و (4, 3) ويساوي

F' (2)) ميل المماس الأفقي، ويساوي صفراً.

P′(2)=3×12+2×0=32

(33) $Q'(7)$

Q′(7)=G(7)F′(7)−F(7)G′(7)G2(7)=1×14−5×−231=4312