

أُتدرب وأحل المسائل

قاعدة السلسلة الأسئلة (25 - 41)

بكتيريا: يمثل الاقتران: $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري:

(25) أجد معدل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N .

$$A(t) = Ne^{0.1t} \quad A'(t) = 0.1Ne^{0.1t} \quad A'(3) = 0.1Ne^{0.3}$$

(26) إذا كان معدل نمو المجتمع بعد k ساعات هو 0.2 خلية لكل ساعة، فما قيمة k بدلالة الثابت N .

$$A'(k) = 0.1Ne^{0.1k} = 0.2N \Rightarrow 0.1e^{0.1k} = 0.2 \Rightarrow e^{0.1k} = 2 \Rightarrow 0.1k = \ln 2 \Rightarrow k = 10 \ln 2$$

أجد المشتقة العليا المطلوبة في كلِّ ممَّا يأتي:

(27) $f(x) = \sin \pi x, f'''(x)$

$$f(x) = \sin \pi x \quad f'(x) = \pi \cos \pi x \quad f''(x) = -\pi^2 \sin \pi x \quad f'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x$$

(28) $f(x) = \cos(2x+1), f(5)(x)$

$$f(x) = \cos(2x+1) \quad f'(x) = -2\sin(2x+1) \quad f''(x) = -4\cos(2x+1) \quad f'''(x) = 8\sin(2x+1) \\ f(4)(x) = 16\cos(2x+1) \quad f(5)(x) = -32\sin(2x+1)$$

(29) $f(x) = \cos x^2, f''(x)$

$$f(x) = \cos x^2 \quad f'(x) = -2x \sin x^2 \quad f''(x) = (-2x)(2x \cos x^2) + (\sin x^2)(-2) = -4x^2 \cos x^2 - 2 \sin x^2$$

(30) إذا كان الاقتران: $y = e^{\sin x}$ ، فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة (0, 1).

$$y = \sin x \Rightarrow dy = \cos x dx$$

ميل المماس هو:

$$m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \sin 0 \cos 0 = 1$$



(31) مواد مشعّة: يمكن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها الابتدائية 20 g من عنصر البلوتونيوم بعد t يوماً باستعمال الاقتران: $A(t) = 20(12)^{t/140}$. أجد معدل تحلل عنصر البلوتونيوم عند $t = 2$.

$$A(t) = 20(12)^{t/140} \Rightarrow A'(t) = 20 \cdot \frac{1}{140} \ln(12) (12)^{t/140} \Rightarrow A'(2) = 20 \cdot \frac{1}{140} \ln(12) (12)^{2/140} \approx -0.098$$

g إذن يتحلل البلوتونيوم بمعدل 0.098 كل يوم عندما $t = 2$.

زنبك: تتحرك كرة معلقة بزنبك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويحدد الاقتران: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ موقع الكرة عند أي زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالسنتيمترات.

(32) أجد السرعة المتجهة للكرة عندما $t = 1$.

$$s(t) = 0.1 \sin 2.4t \Rightarrow v(t) = 2.4 \times 0.1 \cos 2.4t = 0.24 \cos 2.4t \Rightarrow v(1) = 0.24 \cos 2.4 \approx -0.177 \text{ cm/s}$$

(33) أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها صفراً.

$$v(t) = 0 \Rightarrow 0.24 \cos 2.4t = 0 \Rightarrow \cos 2.4t = 0$$

وهذا يعني أنّ:

$$|\sin 2.4t| = 1$$

أي أنّ:

$$\sin 2.4t = 1, \text{ or } -1$$

لكن موقع الكرة هو:

$$s(t) = 0.1 \sin 2.4t$$

وبتعويض قيمة $\sin 2.4t$ نجد أن الموقع هو:

$$s = 0.1(1) = 0.1 \text{ or } s = 0.1(-1) = -0.1$$

cm إذن، عندما تكون سرعة الكرة صفراً يكون موقعها عند 0.1 أو -0.1 cm

(34) أجد موقع الكرة عندما تكون تسارعها صفراً.

$$a(t) = -0.24 \times 2.4 \sin 2.4t = -0.576 \sin 2.4t \quad a(t) = 0 \rightarrow \sin 2.4t = 0$$

لكن موقع الكرة هو:

$$s(t) = 0.1 \sin 2.4t$$

وبتعويض قيمة $\sin 2.4t$ نجد أن الموقع هو: $s = 0.1(0) = 0$

$s = 0$ إذن، عندما تكون تسارع الكرة صفراً يكون موقعها عند ، أي عند مرورها بموقع الاتزان.

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية مما يأتي عند النقطة المحددة بقيمة المعطاة:

$$(35) \quad x = t + 2, \quad y = t^2 - 1, \quad t = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = 2t, \quad \frac{dx}{dt} = 1 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = 2t \cdot 1 = 2t$$

ميل المماس:

$$m = \frac{dy}{dx} \Big|_{t=1} = 2 \times 1 = 2$$

نقطة التماس:

$$x = 1 + 2 = 3, \quad y = (1)^2 - 1 = 0$$

معادلة المماس:

$$y - 0 = 2(x - 3) \rightarrow y = 2x - 6$$

$$(36) x=t^2, y=t^2-4, t=-1$$

$$dydt=2t, dxdt=2t \Rightarrow dydx = \frac{dydt}{dxdt} = \frac{2t}{2t} = 1$$

ميل المماس:

$$m = dydx|_{t=-1} = 1 \times -1 = -1$$

نقطة التماس:

$$x = -1, y = (-1)^2 - 4 = -3$$

معادلة المماس:

$$y + 3 = -1(x + 1) \Rightarrow y = -x - 4$$

$$(37) x=t-\sin t, y=1-\cos t, t=\pi/3$$

$$dydt = \sin t, dxdt = 1 - \cos t \Rightarrow dydx = \frac{dydt}{dxdt} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

ميل المماس:

$$m = dydx|_{t=\pi/3} = \frac{\sin(\pi/3)}{1 - \cos(\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1 - 1/2} = \sqrt{3}$$

نقطة التماس:

$$x = \pi/3 - \sin(\pi/3), y = 1 - \cos(\pi/3) = 1/2$$

معادلة المماس:

$$y - 1/2 = \sqrt{3}(x - \pi/3 + \sin(\pi/3)) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}\pi/3 + 1$$

$$(38) x=\sec^2 t-1, y=\tan t, t=-\pi/4$$

$$dydt = \sec^2 t, dxdt = 2 \times \sec t \times \sec t \tan t = 2 \sec^2 t \tan t \Rightarrow dydx = \frac{dydt}{dxdt} = \frac{\sec^2 t}{2 \sec^2 t \tan t} = \frac{1}{2 \cot t}$$

ميل المماس:

$$m = dydx|_{t=-\pi/4} = \frac{1}{2 \cot(-\pi/4)} = -1/2$$

نقطة التماس:

$$x = \sec^2(-\pi/4) - 1 = 1, y = \tan(-\pi/4) = -1$$

معادلة المماس:

$$y + 1 = -12(x - 1) \rightarrow y = -12x - 12$$

(39) يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطة: $y = 2(1 - \cos t)$, $x = 2(1 - \sin t)$

حيث: $0 \leq t \leq 2\pi$. أثبت أن ميل المماس وميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عندما $t = \pi/4$ هما: $2g \cdot 1 + 2 - 1$ على الترتيب.

$$\frac{dy}{dt} = 2 \sin t, \frac{dx}{dt} = 2(1 - \cos t) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2 \sin t}{2(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

ميل المماس:

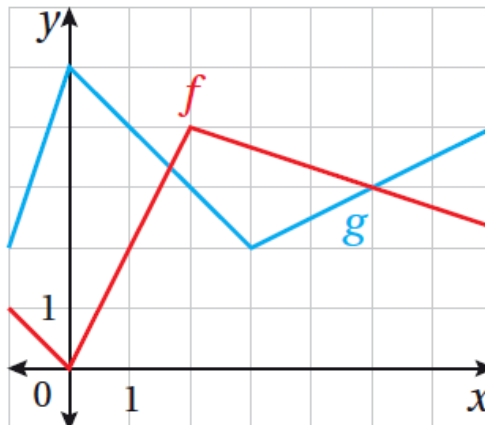
$$m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\pi/4} = \frac{\sin \pi/4}{1 - \cos \pi/4} = \frac{1/\sqrt{2}}{1 - 1/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = 2 + 1 = 3$$

ميل العمودي على المماس:

$$m = -12 + 1 \times 2 - 12 - 1 = 1 - 2 = -1$$

$f(x)$ يبين الشكل المجاور منحنىي الاقترانين $g(x)$ و $f(x)$. إذا كان:

$h(x) = f(g(x))$, وكان: $p(x) = g(f(x))$, فأجد كلاً مما يأتي:



(40) $h'(1)$

$$h'(1) = f(g(1)) \times g'(1) = f(4) \times g'(1)$$

(1) g' ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (3, 2) و (0, 5) ويساوي -1

(4) f' ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (5, 3) و (2, 4) ويساوي -13

$$h'(1) = -13 \times -1 = 13$$

(41) $p'(1)$

$$p'(1) = g'(f(1)) \times f'(1) = g'(2) \times f'(1)$$

(2) g' ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (3, 2) و (0, 5) ويساوي -1

(1) f' ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (0, 0) و (2, 4) ويساوي 2

$$p'(1) = -1 \times 2 = -2$$