

مهارات التفكير العليا

قاعدة السلسلة

تبرير: إذا كان الاقتران: $y = \ln(ax + b)$ ، حيث a و b ثابتان موجبان، وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P هو 1، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(42) أثبت أن الإحداثي x للنقطة P أقل من 1

$$y = \ln(ax + b) \Rightarrow dy/dx = a$$

P ليكن إحداثيا هما (x_1, y_1) ، فيكون ميل المماس عند P هو:

$$dy/dx|_{x=x_1} = a \Rightarrow a x_1 + b = 1 \Rightarrow a = \frac{1 - b}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{1 - b}{a}$$

المقدار $\frac{1 - b}{a}$ أقل من 1؛ لأن $\frac{1 - b}{a}$ مقدار موجب كون a, b موجبين.

(43) أجد إحداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس 12، علماً بأن P هي النقطة $(0, 2)$ ، ثم أبرر إجابتي.

$$P(x_1, y_1) = (0, 2) \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow 1 - b = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y_1 = \ln(ax_1 + b) = \ln(1) = 0 \Rightarrow 2 = 0 \Rightarrow \text{لا يوجد}$$

a, b بتعويض قيمتي في قاعدة الاقتران ينتج أن:

$$y = \ln(e^{2x} + e^2) = \ln e^2(x + 1) = \ln e^2 + \ln(x + 1) = 2 + \ln(x + 1)$$

$$12 = \frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + e^2} \Rightarrow 12(e^{2x} + e^2) = 2e^{2x} \Rightarrow 12e^2 + 12e^{2x} = 2e^{2x} \Rightarrow 12e^2 = -10e^{2x} \Rightarrow \text{لا يوجد}$$

$$12 = \frac{dy}{dx} \Rightarrow 12 = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + e^2} \Rightarrow 12(e^{2x} + e^2) = 2e^{2x} \Rightarrow 12e^2 + 12e^{2x} = 2e^{2x} \Rightarrow 12e^2 = -10e^{2x} \Rightarrow \text{لا يوجد}$$

$$\text{أي أن: } x + 1 = 2$$

$$\text{إذن: } x = 1 \text{ و } y = 2 + \ln 2$$

12 النقطة التي يكون ميل المماس عندها هي $(1, 2 + \ln 2)$.

تبرير: يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطة: $x = t^2, y = 2t$:

(44) أجد dy/dx بدلالة t .

$$dy/dt=2, dx/dt=2t \Rightarrow dy/dx = dy/dt \cdot dt/dx = 2/2t = 1/t$$

(45) أجد معادلة العمودي على المماس المنحني عند النقطة $(t^2, 2t)$.

ميل المماس:

$$m = dy/dx = 1/t$$

ميل العمودي على المماس:

$$m = -1/t = -t$$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - 2t = -t(x - t^2) \Rightarrow y = -tx + t^3 + 2t$$

(46) أثبت أن مساحة المثلث المكون من العمودي على المماس، والمحورين الإحداثيين، هي $12|t|(2+t^2)^2$.

لإيجاد المقطع للعمودي على المماس نضع $y = 0$

$$0 = -tx + t^3 + 2t \Rightarrow x = t^3 + 2t/t = t^2 + 2$$

لإيجاد المقطع للعمودي على المماس نضع $x = 0$

$$y = -t(0) + t^3 + 2t = t^3 + 2t$$

مساحة المثلث:

$$A = 1/2 |x_1 y_2 - x_2 y_1| = 1/2 |t^2 + 2 \cdot t^3 + 2t - 0| = 1/2 |t^2 + 2| |t(t^2 + 2)| = 1/2 |t(t^2 + 2)^2| = 1/2 |t|(t^2 + 2)^2$$