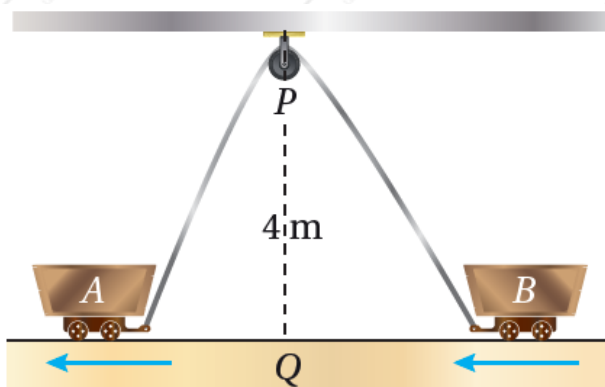


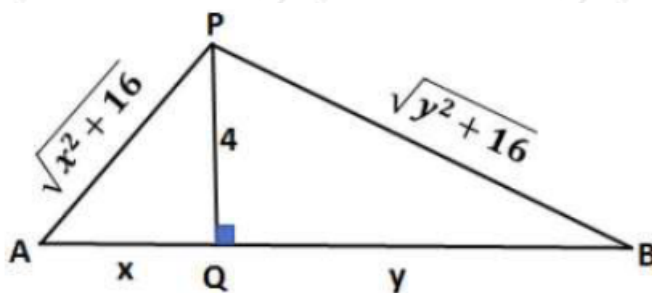
مهارات التفكير العليا

المعدلات المرتبطة



(28) تبرير: رُبطت العربتان A و B بحبل طوله 12 m ، وهو يمر بالبكرة P كما في الشكل المجاور. إذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربتين أسفل P مباشرة، وتبعد عنها مسافة 4 m ، وكانت العربة A تتحرك بعيداً عن النقطة Q بسرعة 0.5 m/s ، فأجد سرعة اقتراب العربة B من النقطة Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بُعد 3 m من النقطة Q ، مبرراً إجابتي.

لتكن الأبعاد كما في الشكل أدناه:



المعطى:

$$dx/dt = 0.5 \text{ m/s}$$

المطلوب:

$$dy/dt |_{x=3}$$

طول الحبل:

$$AP + BP = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 16} = 12$$

عندما $x = 3$ فإن:

$$9 + 16 + y^2 + 16 = 12 \rightarrow y^2 + 16 = 7 \rightarrow y = 3$$

$$x^2 + 16 + y^2 + 16 = 12 \rightarrow x^2 + y^2 + 32 = 12 \rightarrow x^2 + y^2 = -20$$

$$2x dx + 2y dy = 0 \rightarrow dy/dt = -x/y dx/dt$$

$$dy/dt |_{x=3} = -3/3 \times 0.5 = -0.5 \text{ m/s}$$

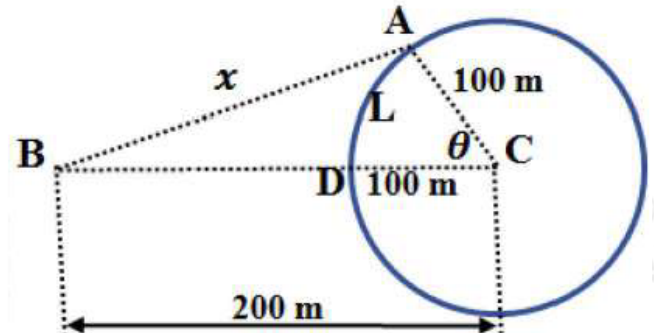
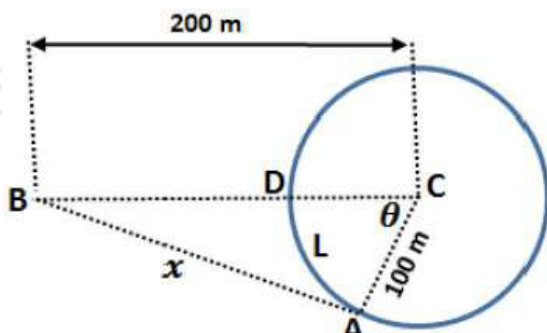
$$5 = -211033 \text{ m/s}$$

إذن، تقترب العربة من النقطة Q بسرعة مقدارها 211033 m/s

(29) تبرير: يركض عداء في مضمار دائري، طول نصف قطره 100 m ، بسرعة ثابتة مقدارها 7 m/s ، ويقف عداء آخر على بعد 200 m من مركز المضمار الركض. أجد معدل تغير المسافة بين العداءين عندما تكون المسافة بينهما 200 m .

تنبيه: أجد جميع الحلول الممكنة.

A ليكن العداء الأول والعداء الثاني B والبعد بينهما x كما في الشكل، وليكن L هو طول القوس الأصغر AD . توجد حالتان لموقع العداء A كما في الرسم الآتي:



الحالة الأولى: العداء A إلى يمين B

L المعطى: (لتكن متناقصة)، ويكون:

$$dL/dt = -7 \text{ m/s}$$

المطلوب:

$$dx/dt|_{x=200 \text{ m}}$$

$$L = r\theta = 100\theta \rightarrow dL/dt = 100d\theta/dt \rightarrow d\theta/dt = -0.07 \text{ rad/s}$$

$$x^2 = (200)^2 + (100)^2 - 2(200)(100)\cos\theta$$

$$x^2 = 50000 - 40000\cos\theta$$

$$2x dx/dt = 40000\sin\theta d\theta/dt$$

$$dx/dt = \frac{40000\sin\theta d\theta/dt}{2x} = \frac{40000\sin\theta (-0.07)}{2x}$$

$$dx/dt = -\frac{14000\sin\theta}{x}$$

$x = 200$ عندما فإن:

$$\cos\theta = \frac{50000 - 40000}{40000} = \frac{10000}{40000} = \frac{1}{4}$$

ومنه:

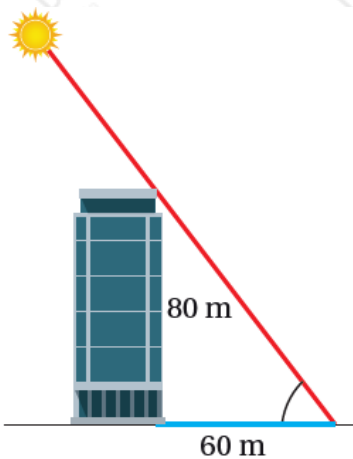
$$\sin\theta = 154 \frac{dx}{dt} \Big|_{x=200} = 20000154200 \times -0.07 = -7154 \text{ m/s}$$

الحالة الثانية: العداء A إلى يسار B

L عندئذ يتزايد طول القوس ، ويكون $dL/dt = 7$ ، ويكون $d\theta/dt = 0.07 \text{ rad/s}$ ، وعليه فإن:

$$\frac{dx}{dt} \Big|_{x=200} = 20000154200 \times 0.07 = 7154 \text{ m/s}$$

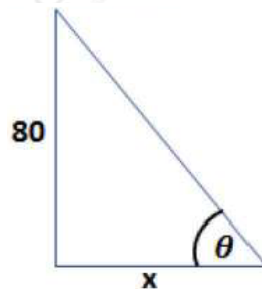
m إذن، عندما تكون المسافة بين العدائين 200 ، فإنهما يقتربان من بعضهما أو يتباعدان عن بعضهما بسرعة مقدارها 7154 m/s



(30) تحدّد: سطعت الشمس في أحد الأيام فوق مبنى ارتفاعه 80 m ، فكان طول ظلّ المبنى في هذه اللحظة 60 m كما في الشكل المجاور. أجد معدل تغير طول ظل المبنى في هذه اللحظة بوحدة cm/min ، مقرباً إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة، علماً بأنّ الشمس في هذا اليوم ستمر فوق المبنى تماماً.

إرشاد: تُكمل الأرض دورة كاملة حول نفسها كل 24 ساعة.

x ليكن طول ظل المبنى ، وزاوية ارتفاع الشمس θ .



θ الشمس في هذا اليوم ستمر فوق المبنى تماماً، يعني أن الزاوية متزايدة.

المعطى:

$$d\theta/dt = 2\pi \text{rad}/24\text{h} = \pi/12 \text{rad/h} = \pi/12 \times 60 \text{min} = \pi/2 \text{rad/min}$$

المطلوب:

$$dx/dt|_{x=60}$$

العلاقة التي تربط المتغيرين هي:

$$\tan\theta = 80/x \Rightarrow \sec^2\theta d\theta/dt = -80/x^2 dx/dt \Rightarrow dx/dt = -x^2 \sec^2\theta / 80 \times d\theta/dt$$

عندما $x = 60$ فإن: طول وتر المثلث القائم في الشكل أعلاه يساوي:
 $100 = 80^2 + 60^2$

$$\theta = \arcsin(60/100) = 36.87^\circ$$

إذن:

$$dx/dt|_{x=60} = -60^2 \sec^2(36.87^\circ) \times \pi/2 = -25\pi \times 144 \text{m/min}$$

لتحويل الوحدة إلى نضرب السرعة في 100 ، فتكون:

$$dx/dt|_{x=60} = -2500\pi \times 144 \text{cm/min}$$

إذن يتناقص طول ظل البناية في تلك اللحظة بسرعة مقدارها 54.5 تقريباً.