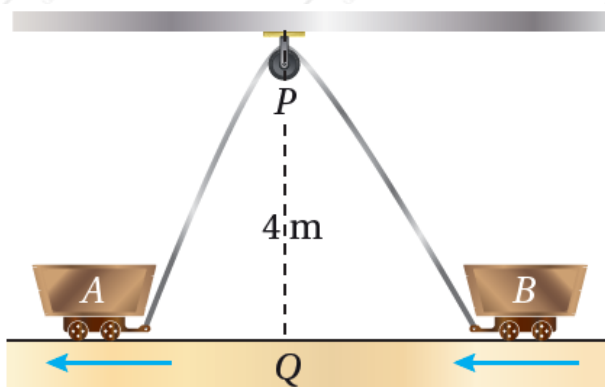


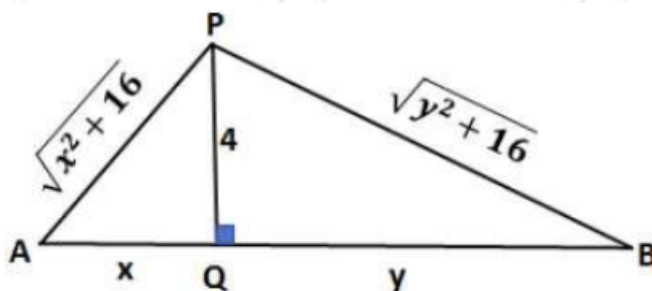
مهارات التفكير العليا

المعدلات المرتبطة



(28) تبرير: رُبطت العربتان A و B بحبل طوله 12 m ، وهو يمر بالبكرة P كما في الشكل المجاور. إذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربتين أسفل P مباشرة، وتبعد عنها مسافة 4 m ، وكانت العربة A تتحرك بعيداً عن النقطة Q بسرعة 0.5 m/s ، فأجد سرعة اقتراب العربة B من النقطة Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بُعد 3 m من النقطة Q ، مبرراً إجابتي.

لتكن الأبعاد كما في الشكل أدناه:



المعطى:

$$dxdt=0.5m/s$$

المطلوب:

$$dydt|x=3$$

طول الحبل:

$$AP+BP=x^2+16+y^2+16=12$$

عندما $x = 3$ فإن:

$$9+16+y^2+16=12 \rightarrow y^2+16=7 \rightarrow y=3$$

$$x^2+16+y^2+16=12 \rightarrow x^2+16=7 \rightarrow x=3$$

$$2x \cdot dxdt + 2y \cdot dydt = 0$$

$$2 \cdot 3 \cdot 0.5 + 2 \cdot 3 \cdot dydt = 0$$

$$3 + 6 \cdot dydt = 0$$

$$6 \cdot dydt = -3$$

$$dydt = -0.5$$

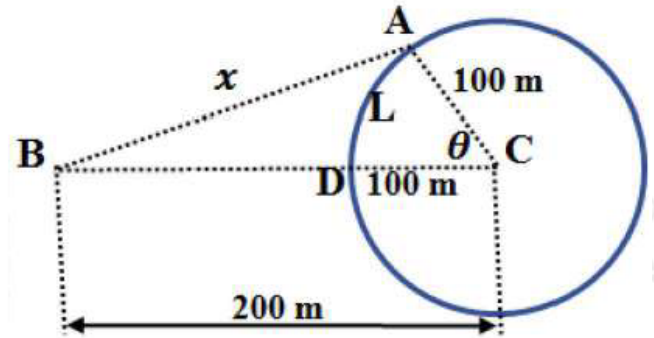
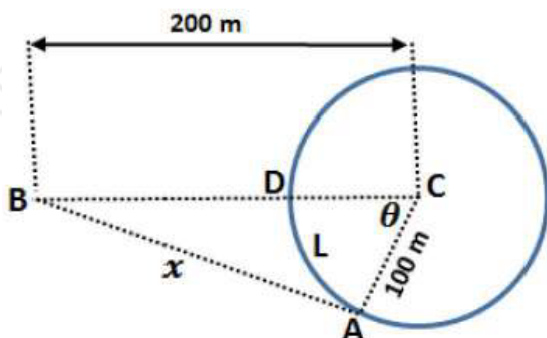
$$5 = -211033 \text{ m/s}$$

إذن، تقترب العربة من النقطة Q بسرعة مقدارها 211033 m/s

(29) تبرير: يركض عداء في مضمار دائري، طول نصف قطره 100 m ، بسرعة ثابتة مقدارها 7 m/s ، ويقف عداء آخر على بعد 200 m من مركز مضمار الركض. أجد معدل تغير المسافة بين العداءين عندما تكون المسافة بينهما 200 m .

تنبيه: أجد جميع الحلول الممكنة.

A ليكن العداء الأول والعداء الثاني B والبعد بينهما x كما في الشكل، وليكن L هو طول القوس الأصغر AD . توجد حالتان لموقع العداء A كما في الرسم الآتي:



الحالة الأولى: العداء A إلى يمين B

L المعطى: (لتكن متناقصة)، ويكون:

$$dL/dt = -7 \text{ m/s}$$

المطلوب:

$$dx/dt|_{x=200 \text{ m}}$$

$$L = r\theta = 100\theta \rightarrow dL/dt = 100d\theta/dt \rightarrow d\theta/dt = -0.07 \text{ rad/s} \\ x^2 = (200)^2 + (100)^2 - 2(200)(100)\cos\theta \\ x^2 = 50000 - 40000\cos\theta \\ 2x dx/dt = 40000\sin\theta d\theta/dt \\ dx/dt = \frac{40000\sin\theta d\theta/dt}{2x} = \frac{40000\sin\theta (-0.07)}{2x} = -\frac{14000\sin\theta}{x}$$

x = 200 عندما فإن:

$$\cos\theta = \frac{50000 - 40000}{40000} = \frac{10000}{40000} = \frac{1}{4}$$

ومنه:

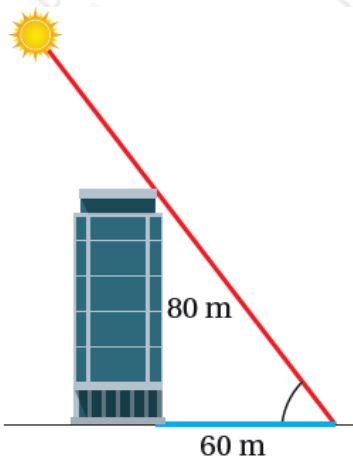
$$\sin\theta = 154 \frac{dx}{dt} \Big|_{x=200} = 20000154200 \times -0.07 = -7154 \text{ m/s}$$

الحالة الثانية: العداء A إلى يسار B

L عندئذ يتزايد طول القوس ، ويكون $dL/dt = 7$ ، ويكون $d\theta/dt = 0.07 \text{ rad/s}$ ، وعليه فإن:

$$\frac{dx}{dt} \Big|_{x=200} = 20000154200 \times 0.07 = 7154 \text{ m/s}$$

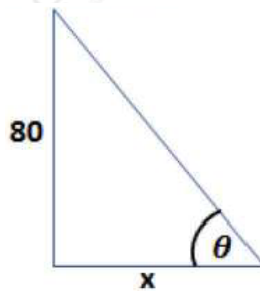
m إذن، عندما تكون المسافة بين العدائين 200 ، فإنهما يقتربان من بعضهما أو يتباعدان عن بعضهما بسرعة مقدارها 7154 m/s



(30) تحدّد: سطعت الشمس في أحد الأيام فوق مبنى ارتفاعه 80 m ، فكان طول ظلّ المبنى في هذه اللحظة 60 m كما في الشكل المجاور. أجد معدل تغير طول ظل المبنى في هذه اللحظة بوحدة cm/min ، مقرباً إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة، علماً بأنّ الشمس في هذا اليوم ستمر فوق المبنى تماماً.

إرشاد: تُكمل الأرض دورة كاملة حول نفسها كل 24 ساعة.

x ليكن طول ظل المبنى ، وزاوية ارتفاع الشمس θ .



θ الشمس في هذا اليوم ستمر فوق المبنى تماماً، يعني أن الزاوية متزايدة.

المعطى:

$$d\theta/dt = 2\pi \text{rad}/24\text{h} = \pi/12 \text{rad/h} = \pi/12 \times 60 \text{min} = \pi/2 \text{rad/min}$$

المطلوب:

$$dx/dt|_{x=60}$$

العلاقة التي تربط المتغيرين هي:

$$\tan\theta = 80/x \Rightarrow \sec^2\theta d\theta/dt = -80/x^2 dx/dt \Rightarrow dx/dt = -x^2 \sec^2\theta / 80 \times d\theta/dt$$

عندما $x = 60$ فإن: طول وتر المثلث القائم في الشكل أعلاه يساوي:
 $100 = 80^2 + 60^2$

$$\theta = \arcsin(60/100) = 36.87^\circ$$

إذن:

$$dx/dt|_{x=60} = -60^2 \sec^2(36.87^\circ) / 80 \times \pi/2 = -25\pi/144 \text{m/min}$$

لتحويل الوحدة إلى نضرب السرعة في 100 ، فتكون:

$$dx/dt|_{x=60} = -2500\pi/144 \text{cm/min}$$

إذن يتناقص طول ظل البناية في تلك اللحظة بسرعة مقدارها 54.5 تقريباً.