

أتحقق من فهمي تكامل اقترانات خاصة

تكامل الاقترانات الأسية

أتحقق من فهمي صفحة 10

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(a) $\int (5x^2 - 3e^{7x}) dx$

$$\int (5x^2 - 3e^{7x}) dx = 5x^3 - 3e^{7x} + C$$

(b) $\int_0^1 \ln 38e^{4x} dx$

$$\int_0^1 \ln 38e^{4x} dx = 84e^{4x} \Big|_0^1 \ln 3 = 2(e^4 \ln 3 - e^0) = 2(e \ln 3^4 - e^0) = 2(81 - 1) = 160$$

(c) $\int e^{1-x} dx$

$$\int e^{1-x} dx = \int (e^{1-x})^{1/2} dx = \int e^{(1-x)/2} dx = -2e^{(1-x)/2} + C$$

(d) $\int (3x + 2x) dx$

$$\int (3x + 2x) dx = 3x \ln 3 + 2(2x^3/2) + C = 3x \ln 3 + 4x^3/2 + C$$

تكامل الاقترانات المثلثية

أتحقق من فهمي صفحة 12

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(a) $\int \cos(3x - \pi) dx$

$$\int \cos(3x - \pi) dx = \frac{1}{3} \sin(3x - \pi) + C$$

(b) $\int (\csc^2(5x) + e^{2x}) dx$

$$\int (\csc^2(5x) + e^{2x}) dx = -15 \cot 5x + 12e^{2x} + C$$

(c) $\int_0^{\pi/3} (\sin 2x - \cos 4x) dx$

$$\int_0^{\pi/3} (\sin 2x - \cos 4x) dx = (-12 \cos 2x - 14 \sin 4x) \Big|_0^{\pi/3} = (-12 \cos 2\pi/3 - 14 \sin 4\pi/3) - (-12 \cos 0 - 14 \sin 0) = (-12(-12) - 14(-32)) - (-12 - 0) = 6 + 38$$

المتطابقات المثلثية والتكامل

أتحقق من فهمي صفحة 14

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(a) $\int \cos^4 x dx$

$$\int \cos^4 x dx = \int \cos^2 x \cos^2 x dx = \int (1 + \cos 2x) \cos^2 x dx = \int (1 + \cos 2x)(1 + \cos 2x) dx = \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \int (1 + 2\cos 2x + 1 + \cos 4x) dx = \int (2 + 2\cos 2x + \cos 4x) dx = 2x + \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x + C$$

(b) $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \sin x dx$

$$\int_0^{\pi/6} \sin 3x \sin x dx = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2} (\cos(3x-x) - \cos(3x+x)) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (\cos 2x - \cos 4x) dx = \left(\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x \right) \Big|_0^{\pi/6} = \left(\frac{1}{4} \sin 2\pi/6 - \frac{1}{8} \sin 4\pi/6 \right) - (0 - 0) = \frac{1}{4} \sin \pi/3 - \frac{1}{8} \sin 2\pi/3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

(c) $\int dx \sqrt{1 + \cos x}$

$$\int dx \sqrt{1 + \cos x} = \int \sqrt{2 \cos^2(x/2)} dx = \int \sqrt{2} |\cos(x/2)| dx = \sqrt{2} \int \cos(x/2) dx = \sqrt{2} \cdot 2 \sin(x/2) + C = 2\sqrt{2} \sin(x/2) + C$$

تكاملات ينتج منها اقتران لوغاريتمي طبيعي

أتحقق من فهمي صفحة 16

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(a) $\int (\sin x - 5x) dx$

$$\int (\sin x - 5x) dx = -\cos x - 5\ln |x| + C$$

(b) $\int 5^{3x+2} dx$

$$\int 5^{3x+2} dx = 5^2 \int 5^{3x} dx = 5^2 \ln |3x+2| + C$$

(c) $\int x^2 - 7x + 2x^2 dx$

$$\int x^2 - 7x + 2x^2 dx = \int (1 - 7x + 2x - 2) dx = x - 7\ln |x| - 2x - 1 + C$$

(d) $\int 2x + 3x^2 + 3x dx$

$$\int 2x + 3x^2 + 3x dx = \ln |x^2 + 3x| + C$$

(e) $\int \sin 2x + \cos 2x dx$

$$\int \sin 2x + \cos 2x dx = -\frac{1}{2} \int 2\sin 2x + \cos 2x dx = -\frac{1}{2} \ln |1 + \cos 2x| + C = -\frac{1}{2} \ln (1 + \cos 2x) + C$$

(f) $\int \cot x dx$

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + C$$

(g) $\int e^{x+7} dx$

$$\int e^{x+7} dx = \ln |e^{x+7}| + C = \ln (e^{x+7}) + C$$

(h) $\int \csc x dx$

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \frac{(1 + \cos x) \times (1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} dx = \int \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} dx = \int (\csc^2 x - \cot x \csc x) dx = -\cot x + \csc x + C$$

أتحقق من فهمي صفحة 17

أجد: $\int x^2 + x + 1 dx$

$$\int x^2 + x + 1 \, dx = \int (x+1)(x+1) \, dx = \frac{1}{2}x^2 + \ln|x+1| + C$$

تكاملات الاقترانات المتشعبة

أتحقق من فهمي صفحة 19

(a) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$ ، فأجد قيمة: $\int_{-1}^2 13f(x) \, dx$.

$$\int_{-1}^2 13f(x) \, dx = \int_{-1}^1 13(1+x) \, dx + \int_1^2 13(2x) \, dx = (x + \frac{1}{2}x^2) \Big|_{-1}^1 + (13x^2) \Big|_1^2 = (1 + \frac{1}{2}) - (-1 + \frac{1}{2}) + 52 - 13 = 10$$

(b) إذا كان: $f(x) = |1-x|$ ، فأجد قيمة: $\int_{-2}^2 22f(x) \, dx$.

$$\int_{-2}^2 22f(x) \, dx = \int_{-2}^1 22(1-x) \, dx + \int_1^2 22(x-1) \, dx = (x - \frac{1}{2}x^2) \Big|_{-2}^1 + (\frac{1}{2}x^2 - x) \Big|_1^2 = (1 - \frac{1}{2}) - (-2 - 2) + (2 - 2) - (\frac{1}{2} - 1) = 5$$

(c) إذا كان: $f(x) = |x^2 - 1|$ ، فأجد قيمة: $\int_{-3}^3 40f(x) \, dx$.

$$\int_{-3}^3 40f(x) \, dx = \int_{-3}^{-1} 40(1-x^2) \, dx + \int_{-1}^1 40(x^2-1) \, dx + \int_1^3 40(x^2-1) \, dx = (x - \frac{1}{3}x^3) \Big|_{-3}^{-1} + (\frac{1}{3}x^3 - x) \Big|_{-1}^1 + (\frac{1}{3}x^3 - x) \Big|_1^3 = (-1 + 12) - (-3 + 36) + (\frac{1}{3} - 1) - (-\frac{1}{3} + 1) + (9 - 3) - (1 - 3) = 563$$

تطبيقات التكامل: الشرط الأولي

أتحقق من فهمي صفحة 20

تلوث: تسرب نפט من ناقلة بحرية، مكوناً بقعة دائرية الشكل على سطح الماء، نصف قطرها $R(t)$ قدماً بعد t دقيقة من بدء التسرب. إذا كان نصف قطر الدائرة يزداد بمعدل: $R'(t) = 210.07t + 5$ ، فأجد $R(t)$ ، علماً بأن $R(0) = 0$.

$$R(t) = \int 210.07t + 5 \, dt = 210.07 \int 0.07t + 5 \, dt = 300 \ln|0.07t + 5| + C$$

$$R(0) = 300 \ln 5 + C = 0 \Rightarrow C = -300 \ln 5$$

$$R(t) = 300 \ln|0.07t + 5| - 300 \ln 5 = 300 \ln|0.07t + 55| = 300 \ln|0.014t + 1|$$

تطبيقات التكامل: الحركة في مسار مستقيم

أتحقق من فهمي صفحة 23

، $v(t) = 3 \cos t$ يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: ،
حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية:

(a) إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقع الجسيم بعد $\pi/6$ ثانية من بدء الحركة.

$$s(t) = \int v(t) dt = \int 3 \cos t dt = 3 \sin t + C$$

$$s(0) = 3 \sin 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$s(t) = 3 \sin t$$

$$s(\pi/6) = 3 \sin(\pi/6) = 1.5 \text{ m}$$

(b) أجد إزاحة الجسيم في الفترة $[0, 2\pi]$.

$$s(2\pi) - s(0) = 3 \sin(2\pi) - 3 \sin(0) = 0 \text{ m}$$

(c) أجد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة $[0, 2\pi]$.

$$|v(t)| = |3 \cos t| = \begin{cases} 3 \cos t, & 0 \leq t < \pi/2 \\ -3 \cos t, & \pi/2 \leq t \leq 3\pi/2 \\ 3 \cos t, & 3\pi/2 < t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} |v(t)| dx = \int_0^{\pi/2} 3 \cos t dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} -3 \cos t dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} 3 \cos t dx$$

$$= 3 \sin t \Big|_0^{\pi/2} - 3 \sin t \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} + 3 \sin t \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} = (3 - 0) - (-3 - 3) + (0 - (-3)) = 12 \text{ m}$$