أتدرب وأحل المسائل

تكامل اقترانات خاصة

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(1) $\int(e2x-3-x)\ dx$

$\int(e2x-3-x)\ dx=\int(e2x-3-x1/2)\ dx=12e2x-3-23x3/2+C$

(2) $\int(e0.5x-3e0.5x)\ dx$

$\int(e0.5x-3e0.5x)\ dx=\int(e0.5x-3e-0.5x)\ dx=2e0.5x+6e-0.5x+C$

(3) $\int(4\sin 5x-5\cos 4x)\ dx$

$\int(4\sin 5x-5\cos 4x)\ dx=-45\cos 5x-54\sin 4x+C$

(4) $\int(3\sec x \tan x-25x)\ dx$

$\int(3\sec x \tan x-25x)\ dx=3\sec x-25\ln |x|+C$

(5) $\int(ex-1ex)2\ dx$

$\int(ex-1ex)2\ dx=\int(ex-2+1ex)\ dx=\int(ex-2+e-x)\ dx=ex-2x-e-x+C$

(6) $\int(\sin (5-3x)+2+4x2)\ dx$

$\int(\sin (5-3x)+2+4x2)\ dx=13\cos (5-3x)+2x+43x3+C$

(7) $\int(ex+1)2\ dx$

$\int(ex+1)2\ dx=\int(e2x+2ex+1)\ dx=12e2x+2ex+x+C$

(8) $\int(e4-x+\sin (4-x)+\cos (4-x))\ dx$

$\int(e4-x+\sin (4-x)+\cos (4-x))dx=-e4-x+\cos (4-x)-\sin (4-x)+C$

(9) $\int x4-62x\ dx$

$\int x2-62x\ dx=\int(12x-3x)\ dx=14x2-3\ln|x|+C$

(10) $\int(3\csc2\ (3x+2)+5x)\ dx$

$\int(3\csc2\ (3x+2)+5x)\ dx=-\cot(3x+2)+5\ln|x|+C$

(11) $\int ex+1ex\ dx$

$\int ex+1ex\ dx=\int(1+e-x)\ dx=x-e-x+C$

(12) $\int exex+4\ dx$

$\int exex+4\ dx=\ln|ex+4|+C=\ln(ex+4)+C$

(13) $\int\cos 2x\sin x\cos x+4\ dx$

$\int\cos 2x\sin x\cos x+4\ dx=\int\cos 2x12\sin 2x+4\ dx=\ln|12\sin 2x+4|+C=\ln(12\sin 2x+4)+C$

(14) $\int dx5-x3$

$\int dx5-x3=-3\int-135-x3\ dx=-3\ln|5-x3|+C$

(15) $\int 11-\sin x\ dx$

$\int 11-\sin x\ dx=\int 11-\sin x\times 1+\sin x1+\sin x\ dx=\int 1+\sin x1-\sin2\ x\ dx=\int 1+\sin x\cos2\ x\ dx=\int(\sec2\ x+\tan x\sec x)\ dx=\tan x+\sec x+C$

(16) $\int\sec2\ x(1+ex\cos2\ x)\ dx$

$\int\sec2\ x(1+ex\cos2\ x)\ dx=\int(\sec2\ x+ex)\ dx=\tan x+ex+C$

(17) $\int(2x-2x)\ dx$

$\int(2x-2x)\ dx=2\ln|x|-2x\ln 2+C$

(18) $\int\sin 3x\cos 2x\ dx$

∫sin 3xcos 2x dx=12∫(sin 5x+sin x) dx=−110cos 5x−12cos x+C

(2x+33x2+9x−1dx (19∫

|3x2+9x−1|+C2x+33x2+9x−1dx=13∫6x+93x2+9x−1dx=13ln∫

(x2+x+1x2+1dx (20∫

x2+x+1x2+1dx=∫(x2+1x2+1+xx2+1)dx=∫(1+12×2xx2+1)dx=x∫
(x2+1)+C+12ln

(x))dx (21xcscx+(sin2xsin2cos+1)∫

x−cx)dx=−cotx+sinxcscx+cotx)dx=∫(csc2xcscx+sin2xsin2cos+1)∫
x+Cx−cossc

(x)2dx (22x+tansec)∫

xtax+2secx)dx=∫(sec2x+tan2xtanx+2secx)2dx=∫(sec2x+tansec)∫
x−x+Cx+2secx−1)dx=2tanxtanx+2secx−1)dx=∫(2sec2x+sec2n

(ex−e−xex+e−xdx (23∫

(ex+e−x)+Cex−e−xex+e−xdx=ln∫

(x2x3−3dx (24∫

|x3−3|+Cx2x3−3dx=13∫3x2x3−3dx=13ln∫

(x)dx (25xcosx−6sinx−sin29cos2)∫

x)dxxcosx)−6sinx−(1−cos2x)dx=∫(9cos2xcosx−6sinx−sin29cos2)∫
2x)dx=∫(5+2x2)−1−3sinx)dx=∫(10(1+cosxcosx−1−6sin=∫(10cos2
2x+32cos2x)dx=4x+52sin2x−3sin2x)dx=∫(4+5cos2x−1−3sin5cos
2x+C

(x)dx (26x−sin4cos4)∫

xx−sin2x)dx=∫(cos2x+sin2x)(cos2x−sin2x)dx=∫(cos2x−sin4cos4)∫

2x+C2xdx=12sin)dx=∫cos

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(12xdx (2712xdx∫0π2cos0π2cos∫

0)=4π2−sin12x|0π=4(sin12xdx=4sin0π2cos∫

(x|dx (2802π|sin∫

xdx+∫π2π−six|dx=∫0πsinx,π<x≤2π∫02π|sinx,0≤x≤π−sinx|={sinsin| π=−(−2)+1−2π−cos0)+cosπ−cosx|π2π=−(cosx|0π+cosxdx=−cosn (−1)=4

(xdx (29π/6π/33tan2∫

π3−π3x−x)|π6π3=3(tanx−1)dx=3(tanxdx=∫π6π33(sec2π6π33tan2∫ π6−π6)=23−π2)−3(tan

(1e8xx2+1dx (30∫

(2=4ln(e2+1)−4ln|x2+1||1e=4ln1e8xx2+1dx=4∫1e2xx2+1dx=4ln∫ (e2+12

(xdx(313xcos0π/6sin∫

2x)|04x−14cos2x)dx=(−18cos4x+sinxdx=12∫0π6(sin3xcos0π6sin∫ 0)=5160−14cos2π6−(−18cos4π6−14cosπ6=−18cos

(xdx (32x1+cot2π/4π/3cot2∫

xdcsc2xsin2xdx=∫π4π3cos2xcsc2xdx=∫π4π3cot2x1+cot2π4π3cot2∫ 2x)dxdx=12∫π4π3(1+cosx)dx=∫π4π3cos2x(1sin2xsin2x=∫π4π3cos2 (2π42π3−(π8+14sin2x)|π4π3=π6+14sinx=12(x+12sin

(x−5x)dx (33)03∫

55)=92−124ln5−(0−1ln5)|03=92−125lnx−5x)dx=(12x2−5xln)03∫

(x2−4x+3|dx (34|04∫

x2−4x+3|={x2−4x+3,x<1−x2+4x−3,1≤x≤3x2−4x+3,x>3∫04|x2|−4x+3|dx=∫01(x2−4x+3)dx+∫13(−x2+4x−3)dx+∫34(x2−4x+3)dx=(13x3−2x2+3x)|01+(−13x3+2x2−3x)|13+(13x3−2x2+3x)|34=13−2+3−0+(−9+18−9)−(−13+2−3)+643−32+12

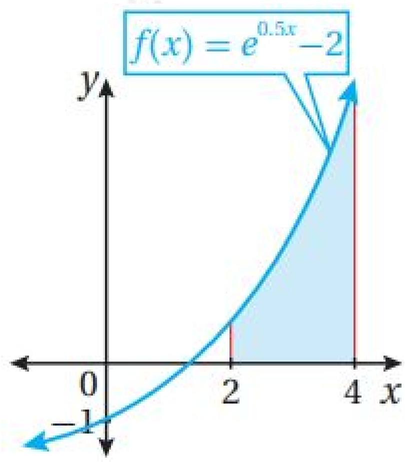
(x−3|)dx (35|−3)14∫

x−3|={3−x,x≤3x−3,x>3∫14(3−|x−3|)dx=∫13(3−(3−x))dx+∫34(3|−(x−3))dx=∫13xdx+∫34(6−x)dx=12x2|13+(6x−12x2)|34=92−12+24−8−(18−92)=132

(36) إذا كان f(x)={x2+4,x<04−x,x≥0، فأجد قيمة: ∫−11f(x)dx.

11f(x)dx=∫−10(x2+4)dx+∫01(4−x)dx=(13x3+4x)|−10+(4x−12x−∫2)|01=0−(−13−4)+4−12−0=476

(37) أجد مساحة المنطقة المظللة بين المحور x ومنحنى الاقتران: f(x)=e0.5x−2 الممثل في الشكل المجاور.



A=∫24(e0.5x−2)dx=(2e0.5x−2x)|24=2e2−8−(2e−4)=2e2−2e−4

(38) إذا كان: ∫12a3a2x+1xdx=ln، فأجد قيمة الثابت a، حيث: a>0.

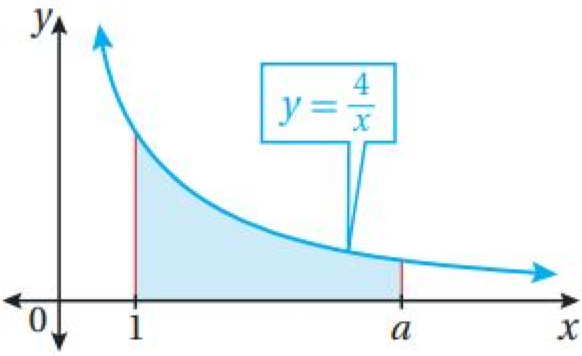
a=4a3a−2a−ln|x|)|a3a=6a+lna3a2x+1xdx=∫a3a2+1xdx=(2x+ln∫4123⇒a=14ln34a=ln12−ln12⇒4a=ln3=ln3⇒4a+ln+ln

(39) أثبت أن: ∫20axx2+a2dx=ln، حيث: a≠0.

(a(2a2)−ln(x2+a2)|0a=12(ln0axx2+a2dx=12∫0a2xx2+a2dx=12ln∫

22=ln2))=12ln

(40) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران: f(x)=4x. إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران f(x)، والمحور x، والمستقيمين: x=1،x=a، هي 10 وحدات مربعة، فأجد قيمة الثابت a.



a=53⇒a=e52a=10⇒lna⇒4ln1=4lna−4ln|x||1a=4lnA=∫1a4xdx=4ln

(41) إذا كان: f(x)=∫cos(12x+π)dx، وكان: f(π)=3، فأجد f(0).

3π2(12π+π)+C3=2sin(12x+π)+Cf(π)=2sin(12x+π)dx=2sinf(x)=∫cos
π+5=5(12x+π)+5⇒f(0)=2sin+C3=−2+C⇒C=5⇒f(x)=2sin

(42) إذا كان: y=∫sin(π2−2x)dx، وكان: y=1 عندما x=π4، فأثبت أنه يمكن كتابة y في صورة: y=1+sin2x2.

(π2−2x)+Cy|x=π4=12(π2−2x)−2+C=12cos(π2−2x)dx=−cosy=∫sin
2x+1(π2−2x)+12⇒y=12sin(π2−π2)+C1=12+C⇒C=12⇒y=12coscos
2x22⇒y=1+sin

(43) يمثل الاقتران: dydx=e2x−2e−x ميل المماس لمنحنى الاقتران y. أجد قاعدة الاقتران y إذا علمت أن منحناه يمر بالنقطة (0,1).

y=∫(e2x−2e−x)dx=12e2x+2e−x+Cy|x=0=12+2+C1=52+C⇒C=−
32⇒y=12e2x+2e−x−32

(44) إذا كان: ∫π/9π(9+sin3x)dx=aπ+b، فأجد قيمة الثابتين النسبيين: a وb.

π3=8π3π−π+13cos3x)|π9π=9π−13cos3x)dx=(9x−13cosπ9π(9+sin∫
+13+16=8π+12⇒8π+12=aπ+b

ونظراً لأن a وb نسبيان، فلا يوجد حل لهذه المعادلة سوى أن يكون: a=8,b=12

(45) يمثل الاقتران: f′(x)=cos2x ميل المماس لمنحنى الاقتران f(x). أجد قاعدة

الاقتران f إذا علمت أن يمر بنقطة الأصل.

2x)+Cf(0)=12(0+12si2x)dx=12(x+12sinxdx=12∫(1+cosf(x)=∫cos2
2x0)+C0=0+C⇒C=0f(x)=12x+14sinn

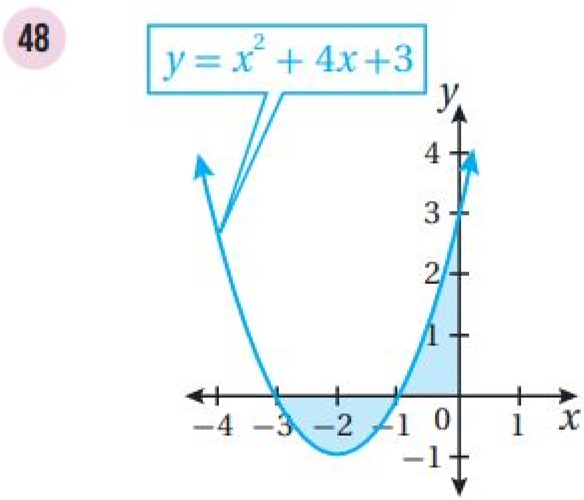
يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: v(t)=e−2t، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم هو 3m، فأجد كلاً مما يأتي:

(46) موقع الجسيم بعد t ثانية.

s(t)=∫e−2tdt=−12e−2t+Cs(0)=−12+C=3⇒C=723=−12+C⇒C=72s
(t)=−12e−2t+72

(47) موقع الجسيم بعد 100 ثانية.

s(100)=−12e−200+72≈3.5m



بيئة: في دراسة تناولت أحد أنواع الحيوانات المهددة بالانقراض في غابة، تبين أن عدد حيوانات هذا النوع P(t) يتغير بمعدل: P′(t)=−0.51e−0.03t، حيث t الزمن بالسنوات بعد بدء الدراسة:

(48) أجد قاعدة الاقتران P(t) عند أي زمن t، علما بأن عدد حيوانات هذا النوع عند بدء الدراسة هو 500 حيوان.

P(t)=∫−0.51e−0.03tdt=−0.51−0.03e−0.03t+C=17e−0.03t+CP(0)
=17+C500=17+C⇒C=483P(t)=17e−0.03t+483

(49) أجد عدد الحيوانات بعد 10 سنوات من بدء الدراسة، مقرباً إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

$P(10)=17e^{-0.3}+483\approx 496$

طب: في تجربة لدواء جديد أعطي لمريض لديه ورم حميد، حجمه $30cm^3$، تبين أن حجم الورم بعد t يوماً من بدء التجربة يتغير بمعدل: $P'(t)=0.15-0.9e^{0.006t}$ مقيساً بوحدة (cm^3/day):

(50) أجد قاعدة حجم الورم بعد t يوماً من بدء التجربة.

$P(t)=\int(0.15-0.9e^{0.006t})dt=0.15t-\frac{0.9}{0.006}e^{0.006t}+C=0.15t-150e^{0.006t}+C$
$P(0)=-150+C$
$30=-150+C\Rightarrow C=180$
$P(t)=0.15t-150e^{0.006t}+180$

(51) أجد حجم الورم بعد 10 أيام من بدء التجربة.

$P(10)=1.5-150e^{0.06}+180\approx 22.2cm^3$