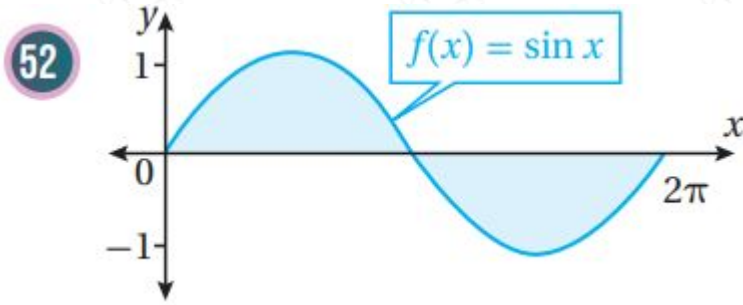


مهارات التفكير العليا

تكامل اقترانات خاصة

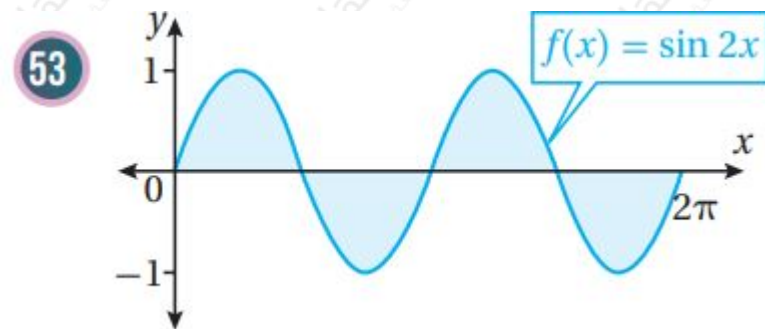
تبرير: أجد مساحة المنطقة المظلمة في كل من التمثيلين البيانيين الآتين، مبرراً إجابتي;



$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = (-\cos x) \Big|_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0$$

ملحوظة: يمكن الاستفادة من التماثل وإيجاد المساحة المطلوبة كما يأتي:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 2 \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2(-\cos x) \Big|_0^{\pi} = 2(-\cos \pi + \cos 0) = 2(1 + 1) = 4$$



$$\int_0^{2\pi} \sin 2x \, dx = \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) \Big|_0^{2\pi} = \left(-\frac{1}{2} \cos 4\pi\right) - \left(-\frac{1}{2} \cos 0\right) = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

والأسهل هو الاستفادة من التماثل وإيجاد المساحة المطلوبة كما يأتي:

$$\int_0^{2\pi} \sin 2x \, dx = 2 \int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = 2 \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) \Big|_0^{\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0$$

تحد: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\int_0^{\pi} \sec x \, dx \quad \int_0^{\pi} \sin x \, dx \quad \int_0^{\pi} \cos x \, dx$$

$$\int \frac{1}{x-1} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x| - \ln|x-1| + C = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + C$$

$$\int (55x^2 + \sin x) dx$$

$$\int (x+1) dx = \int x^2 dx + \int x dx + \int 1 dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

$$\int (x^3 dx) (561x \ln x)$$

$$\int x dx + C \int \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 + C \int \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 + C \left(x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \right) = \frac{1}{2}x^2 + C(x \ln x - x) + C$$

(57) تبرير: إذا كان: $\int_1^a (1-x-2x^2+3) dx = 0.5 \ln a$, فأجد قيمة الثابت a , حيث: $a > 0$.

$$\int_1^a (1-x-2x^2+3) dx = \left(x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + 3x \right) \Big|_1^a = \left(4x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_1^a = \left(4a - \frac{1}{2}a^2 - \frac{2}{3}a^3 \right) - \left(4 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) = 0.5 \ln a$$

$$5 = 0.5a^2a+3 + 12 \ln 5 \Rightarrow \ln a^{2a+3} + 12 \ln 5 = \ln(2a+3) + 12 \ln a - 12 \ln 5 = \ln n$$

$$a^{2a+3} = 0 \Rightarrow a^{2a+3} = 1 \Rightarrow a = 2a+3 \Rightarrow a^2 = 2a+3 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow (a-5)(a+1) = 0 \Rightarrow a = 3, a = -1$$

لأن $a > 0$ مرفوضة

(58) تبرير: أثبت بطريقتين مختلفتين أن: $\int_0^{\pi/4} \sin 3x dx - \int_0^{\pi/4} \sin x \cos 0 dx = 0$.

طريقة أولى:

$$\int_0^{\pi/4} (18 \sin^4 x + \cos 3x) dx = \int_0^{\pi/4} (18 \sin^4 x + \cos 3x) dx = 12 \int_0^{\pi/4} (\cos x \cos 0 dx) + \int_0^{\pi/4} \cos 3x dx$$

$$= 12 \int_0^{\pi/4} (\cos x \sin \pi/2) dx - (0+0) = 14 \dots \dots \dots \int_0^{\pi/4} \sin \pi + 14 \sin 4 = (18 \sin \pi) - (0-0) \pi^2 - 18 \sin 4x \Big|_0^{\pi/4} = (14 \sin 2x - 18 \sin 4x) dx = (14 \sin 2x - \cos 3x) dx = 14 - 14 = 0$$

طريقة ثانية:

$$\int_0^{\pi/4} (3x) dx \sin 3x - \int_0^{\pi/4} \sin x \cos 3x dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x \sin 3x dx) - \int_0^{\pi/4} \sin x \cos 0 dx = \int_0^{\pi/4} \cos x dx - \int_0^{\pi/4} \sin x dx = \sin x + \cos x \Big|_0^{\pi/4} = (\sin \pi/4 + \cos \pi/4) - (\sin 0 + \cos 0) = 1 - 1 = 0$$

(59) تبرير: إذا كان: $\int_0^{\pi/3} (kx) dx = \pi(7 - 62\pi/4k\pi/3k(1 - \pi \sin))$, فأجد قيمة الثابت k , مبرراً إجابتي.

$$\int_0^{\pi/4} (3 - 4k - \pi k \cos kx) dx = \pi^3 k + \pi k \cos kx \Big|_0^{\pi/4} = \pi^3 k + \pi k \cos \frac{\pi^4 k}{4} - \pi^3 k = \pi^3 k (1 - \pi \sin \frac{\pi^4 k}{4})$$

$$\pi^4 = \pi k (13 + 12 - 14 - 22) = \pi 12k (7 - 62) \Rightarrow \pi 12k (7 - 62) = \pi (7 - 62) \Rightarrow k = \cos 112$$

تحد: يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$$v(t) = \begin{cases} 2t+4, & 0 \leq t \leq 6 \\ 20 - (t-8)^2, & 6 < t \leq 10 \end{cases}$$

حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد كلاً مما يأتي:

(60) موقع الجسيم بعد 5 ثوان من بدء الحركة.

$$v(t) = \begin{cases} 2t+4, & 0 \leq t \leq 6 \\ 16t - t^2 - 44, & 6 < t \leq 10 \end{cases} \quad s(t) = \int v(t) dt = \int (2t+4) dt = t^2 + 4t + C_1$$

$$s(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow s(t) = t^2 + 4t, \quad 0 \leq t \leq 6 \quad s(5) = 25 + 20 = 45 \text{ m}$$

(61) موقع الجسيم بعد 9 ثوان من بدء الحركة.

$$s(t) = \int (16t - t^2 - 44) dt = 8t^2 - \frac{1}{3}t^3 - 44t + C_2 \quad 6 < t \leq 10$$

لإيجاد قيمة C_2 نستعمل موقع الجسم عند $t=6$ موقعاً ابتدائياً بالنسبة للفترة $6, 10$:

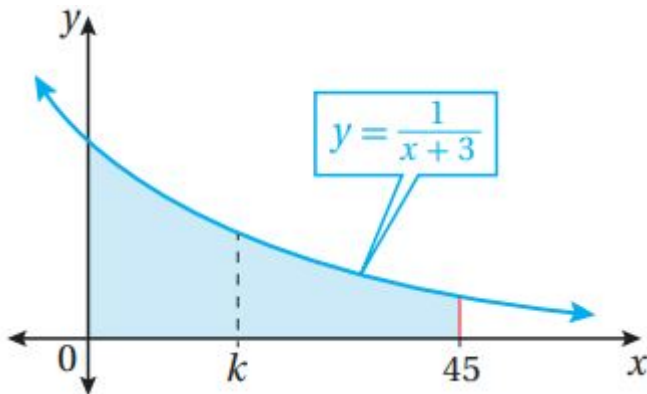
$$s(6) = 8(6)^2 - \frac{1}{3}(6)^3 - 44(6) + C_2$$

ونحسب $s(6)$ من اقتران الموقع الذي وجدناه في السؤال السابق بالنسبة للفترة $[0, 6]$:

$$s(t) = t^2 + 4t, \quad 0 \leq t \leq 6 \quad s(6) = 6^2 + 4(6) = 60$$

$$60 = 8(6)^2 - \frac{1}{3}(6)^3 - 44(6) + C_2$$

$$60 = -48 + C_2 \Rightarrow C_2 = 108 \Rightarrow s(t) = 8t^2 - \frac{1}{3}t^3 - 44t + 108, \quad 6 < t \leq 10 \quad s(9) = 117 \text{ m}$$



(62) تحد: يبين الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $y=1x+3$ ، والمحاور x ، والمسـتـقيم: $x=0$ ، $x=45$ ، أجد قيمة k التي تقسم المنطقة المطلقة إلى منطقتين متساويتين في الساحة.

$$1612A = \int_0^k \frac{1}{x+3} dx = \ln|x+3| \Big|_0^k = \ln(k+3) - \ln 3$$

$$1612A = \int_0^{45} \frac{1}{x+3} dx = \ln|x+3| \Big|_0^{45} = \ln 48 - \ln 3$$

$$k+3 \Rightarrow 4 = 161/2 = \ln k+3 - \ln 3 \Rightarrow \ln k+3 = \ln 16 \Rightarrow 12 \ln 3 = \ln(k+3) - \ln 3 \Big|_0^k = \ln k+3 \Rightarrow k=9$$