

أتحقق من فهمي

التكامل بالتعويض

التكاملات بالتعويض للتكاملات غير المحدودة

أتحقق من فهمي من فهمي صفحة (32):

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$(4x^2x^3 - 5)dx \quad (a) \int$$

$$u = x^3 - 5 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2} \int 4x^2x^3 - 5 dx = \int 4x^2u \times \frac{du}{3x^2} = \int \frac{4}{3}u du = \frac{4}{3} \times \frac{u^2}{2} + C = \frac{2}{3}u^2 + C = \frac{2}{3}(x^3 - 5)^2 + C$$

$$(12xex)dx \quad (b) \int$$

$$u = x \Rightarrow du = dx \int 12xex dx = \int 12xe^u \times du = \int 12e^u du = 12e^u + C = 12ex + C$$

$$(x)^3 dx \quad (c) \int \ln$$

$$u = x \Rightarrow du = dx \int (x)^3 dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{x^4}{4} + C$$

$$(x) dx \quad (d) \int \ln \cos$$

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \int \cos u du = \sin u + C = \sin(\ln x) + C$$

$$(5x) dx \quad (e) \int \sin \cos^4$$

$$u = \cos 5x \Rightarrow du = -5 \sin 5x dx \int \cos^4 5x dx = \int \cos^3 u \times \frac{du}{-5} = -\frac{1}{5} \int \cos^3 u du = -\frac{1}{5} \int \cos^2 u \sin u du = -\frac{1}{5} \int (1 - \sin^2 u) \sin u du = -\frac{1}{5} \left(\frac{\sin^2 u}{2} - \frac{\sin^3 u}{3} \right) + C = -\frac{1}{10} \cos^2 5x + \frac{1}{15} \cos^3 5x + C$$

$$(x^2) dx \quad (f) \int$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \int x^2 dx = \int \frac{u}{2} du = \frac{1}{2} \times \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{4}x^4 + C$$

أتحقق من فهمي من فهمي صفحة (34):

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$(x^1+2x)dx \quad (a) \int$$

$$u=1+2x \Rightarrow du/dx=2 \Rightarrow dx=du/2, x=u-1/2 \int (x^1+2x)dx = \int (u-1/2)^2 \times du/2 = 1/4 \int (u^2 - u - 1/4) du = 1/4 (2/3 u^3 - 1/2 u^2 - 1/4 u) + C = 1/6 (1+2x)^3 - 1/8 (1+2x) + C$$

$$(x^7(x^4-8)^3)dx \quad (b) \int$$

$$u=x^4-8 \Rightarrow du/dx=4x^3 \Rightarrow dx=du/4x^3, x^4=u+8 \int x^7(x^4-8)^3 dx = \int x^7 u^3 \times du/4x^3 = 1/4 \int x^4 u^3 du = 1/4 \int (u+8) u^3 du = 1/4 \int (u^4 + 8u^3) du = 1/4 (1/5 u^5 + 2u^4) + C = 1/20 (x^4-8)^5 + 1/2 (x^4-8)^4 + C$$

$$(e^{3x}(1-e^x)^2)dx \quad (c) \int$$

$$u=1-e^x \Rightarrow du/dx=-e^x \Rightarrow dx=du/-e^x, e^x=1-u \int e^{3x}(1-e^x)^2 dx = \int e^{3x} u^2 \times du/-e^x = \int -e^{2x} u^2 du = \int -(1-u)^2 u^2 du = \int (-1+2u-u^2) u^2 du = \int (-u^2+2u^3-u^4) du = -1/3 u^3 + 2/4 u^4 - 1/5 u^5 + C = -1/3 (1-e^x)^3 + 1/2 (1-e^x)^4 - 1/5 (1-e^x)^5 + C$$

التكاملات بالتعويض للتكاملات تحوي المقدار $ax+bn$

أتحقق من فهمي من فهمي صفحة (35):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$(dx/x+x^3) \quad (a) \int$$

$$u=x^3 \Rightarrow du/dx=3x^2 \Rightarrow dx=du/3x^2, x=u^{1/3} \int (dx/x+x^3) = \int (du/3x^2 + x^3) = \int (du/3u^{2/3} + u) = \int (1/3 u^{-2/3} + u) du = 1/3 \int u^{-2/3} du + \int u du = 1/3 \times 3 u^{1/3} + 1/2 u^2 + C = u^{1/3} + 1/2 u^2 + C = x + 1/2 x^2 + C$$

$$(x(1-x)^2)dx \quad (b) \int$$

$$u=1-x \Rightarrow du/dx=-1 \Rightarrow dx=-du, x=1-u \int x(1-x)^2 dx = \int (1-u) u^2 \times (-du) = \int (-u^2 + u^3) du = -1/3 u^3 + 1/4 u^4 + C = -1/3 (1-x)^3 + 1/4 (1-x)^4 + C$$

$$\int (1-u)u^2 du = \int (1-u)u^2 du = \int (-u^3 + u^5) du = -\frac{35}{4}u^4 + \frac{38}{6}u^6 + C$$

$$= -\frac{35}{4}(1-x)^4 + \frac{38}{6}(1-x)^6 + C = -\frac{35}{4}(1-x)^4 + \frac{38}{6}(1-x)^6 + C$$

أتحقق من فهمي من فهمي صفحة (37):

أسعار: يمثل الاقتران $p(x)$ سعر قطعة (بالدينار) تستعمل في أجهزة الحاسوب، حيث x عدد القطع المباعة منها بالمئات. إذا كان: $p'(x) = -135x^9 + x^2$ هو معدل تغير سعر هذه القطعة، فأجد $p(x)$ ، علماً بأن سعر القطعة الواحدة هو 30 JD عندما يكون عدد القطع المباعة منها 400 قطعة.

$$p(x) = \int (-135x^9 + x^2) dx = -\frac{135}{10}x^{10} + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$p(4) = -\frac{135}{10}(4)^{10} + \frac{1}{3}(4)^3 + C = -1359 + 16 + C = -1359 + 16 + C = -1355 + C$$

$$p(30) = -\frac{135}{10}(30)^{10} + \frac{1}{3}(30)^3 + C = -675 + C$$

$$-675 + C = -1355 + C \Rightarrow C = 705$$

$$p(x) = 705 - 1359x + \frac{1}{3}x^3$$

التكامل بالتعويض لاقتربات تتضمن اقتراني الجيب وجيب التمام المرفوعين إلى أس فردي

أتحقق من فهمي من فهمي صفحة (39):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$\int \sin^3(x) dx$$

$$x \Rightarrow dx \Rightarrow du = -\sin(x) dx \Rightarrow u = \cos(x)$$

$$\int \sin^3(x) dx = \int \sin^2(x) \sin(x) dx = \int (1 - \cos^2(x)) \sin(x) dx = \int (1 - u^2) (-du) = \int (u^2 - 1) du = \frac{1}{3}u^3 - u + C = \frac{1}{3}\cos^3(x) - \cos(x) + C$$

$$\int \cos^5(x) dx$$

$$x \Rightarrow dx \Rightarrow du = \sin(x) dx \Rightarrow u = \cos(x)$$

$$\int \cos^5(x) dx = \int \cos^4(x) \cos(x) dx = \int (1 - \sin^2(x))^2 \cos(x) dx = \int (1 - u^2)^2 (-du) = \int (1 - 2u^2 + u^4) (-du) = \int (-1 + 2u^2 - u^4) du = -u + \frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C = -\cos(x) + \frac{2}{3}\cos^3(x) - \frac{1}{5}\cos^5(x) + C$$

التكامل بالتعويض لاقتربات تتضمن الظل أو ظل التمام، أو القاطع، أو قاطع التمام

أتحقق من فهمي من فهمي صفحة (41):

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\int (\tan^4 x) dx$$

$$\begin{aligned} \int (\tan^4 x) dx &= \int (\tan^2 x)(\sec^2 x - 1) dx = \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x dx = \int \tan^2 x \tan^2 x dx = \int \tan^2 x \tan^4 x dx \\ &= \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x) dx = \int \tan^2 x dx + \int \tan^4 x dx \\ &= \int \tan^2 x dx + \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x dx = \int \tan^2 x \sec^2 x dx \\ &= \int u^2 \sec^2 x dx \Rightarrow \tan x \Rightarrow dx = d \sec^2 x \Rightarrow du = \sec^2 x \\ &= \int u^2 du - \int (\sec^2 x - 1) dx = \frac{1}{3} u^3 - \tan x - x + C = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x - x + C \end{aligned}$$

$$\int (\cot^5 x) dx$$

$$\begin{aligned} \int (\cot^5 x) dx &= \int (\cot^3 x)(\csc^2 x) dx = \int \cot^3 x \cot^2 x dx = \int \cot^3 x \cot^4 x dx = \int \cot^3 x \cot^5 x dx \\ &= \int \cot^3 x (1 + \cot^2 x) dx = \int \cot^3 x dx + \int \cot^5 x dx \\ &= \int \cot^3 x dx + \int \cot^3 x \csc^2 x dx - \int \cot^3 x dx = \int \cot^3 x \csc^2 x dx \\ &= \int (u^2 - 1)^2 du - u = \int (u^4 - 2u^2 + 1) du = \frac{1}{5} u^5 - \frac{2}{3} u^3 + u - \ln |u| + C \\ &= \frac{1}{5} \cot^5 x - \frac{2}{3} \cot^3 x + \cot x - \ln |\csc x| + C = \frac{1}{5} \cot^5 x - \frac{2}{3} \cot^3 x + \cot x - \ln |\csc x| + C \end{aligned}$$

$$\int (\sec^4 x) dx$$

$$\begin{aligned} \int (\sec^4 x) dx &= \int \sec^2 x \tan^2 x dx = \int \sec^2 x (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^4 x dx - \int \sec^2 x dx \\ &= \int \sec^2 x \tan^2 x dx = \int \sec^2 x \tan^2 x dx = \int \sec^2 x \tan^2 x dx \\ &= \int (1 + \tan^2 x) \tan^2 x dx = \int (\tan^2 x + \tan^4 x) dx \\ &= \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + C = \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + C \end{aligned}$$

التكامل بالتعويض للتكاملات المحدودة

أتحقق من فهمي من فهمي صفحة (43):

أجد قيمة كل من التكاملين الآتيين:

$$\int_0^2 (x+1)^3 dx$$

$$\begin{aligned} u = x + 1 \Rightarrow du = dx, x = u - 1, x = 0 \Rightarrow u = 1, x = 2 \Rightarrow u = 3 \\ \int_0^2 (x+1)^3 dx = \int_1^3 u^3 du = \frac{1}{4} u^4 \Big|_1^3 = \frac{1}{4} (3^4 - 1^4) = \frac{1}{4} (81 - 1) = \frac{80}{4} = 20 \end{aligned}$$

$$\int (x+2) \sec x \tan x \, dx$$

$$\begin{aligned} x=0 \Rightarrow u=3 \quad x=\pi/3 \Rightarrow u=4 \\ \int x \tan x \Rightarrow dx = du \sec x \tan x + 2 \Rightarrow du dx = \sec u = \sec \\ x = \int \frac{1}{3} \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln |u| + C = \frac{1}{3} \ln |3 \tan x + 2| + C \\ \frac{1}{3} \ln |3(8-33)| \approx 1.87 \end{aligned}$$