أتدرب وأحل المسائل

التكامل

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(x2(2x3+5)4dx (1∫

u=2x3+5⇒dudx=6x2⇒dx=du6x2∫x2(2x3+5)4dx=∫x2u4×du6x2=∫16u4du=130u5+C=130(2x3+5)5+C

(x2x+3dx (2∫

u=x+3⇒dx=du,x=u−3x2x+3dx=∫x2udu=∫(u−3)2udu=∫(u52−6u32+9u12)du=27u72−125u52+6u32+C=27(x+3)72−125(x+3)52+6(x+3)32+C=27(x+3)7−125(x+3)5+6(x+3)3+C

(x(x+2)3dx (3∫

u=x+2⇒dx=du,x=u−2∫x(x+2)3dx=∫xu3du=∫(u−2)u3du=∫(u4−2u3)du=15u5−12u4+C=15(x+2)5−12(x+2)4+C

(xx+4dx (4∫

u=x+4⇒dx=du,x=u−4∫xx+4dx=∫xudu=∫u−4udu=∫(u12−4u−12)du=23u32−8u12+C=23(x+4)32−8(x+4)12+C=23(x+4)3−8x+4+C

(2xdx (5xcossin∫

x⇒dx=du−sinx⇒dudx=−sinx−1)dxu=cosx(2cos22xdx=∫sinxcossin∫x=∫(1−2u2)du=u−23u3+C=cx(2u2−1)×du−sin2xdx=∫sinxcosx∫sinx+Cx−23cos3os

(e3xex+1dx (6∫

bbbu=ex+1⇒dudx=ex⇒dx=duex,ex=u−1∫e3xex+1dx=∫e3xu×due|u|+C=12(exx=∫e2xudu=∫(u−1)2udu=∫(u−2+1u)du=12u2−2u+ln(ex+1)+C+1)2−2(ex+1)+ln (xdx (7sec4∫

x⇒dudx=secx)dxu=tanx(1+tan2xdx=∫sec2x×sec2xdx=∫sec2sec4∫x=∫(1+u2)du=u+x(1+u2)×dusec2xdx=∫sec2x∫sec4x⇒dx=dusec22x+Cx+13tan313u3+C=tan

(xdx (8xcos2tan∫

x∫tax⇒dx=dusec2x⇒dudx=sec2xdxu=tanxsec2xdx=∫tanxcos2tan∫x+Cx=∫udu=12u2+C=12tan2x×dusec2xdx=∫usec2xcos2n

(x)xdx (9(lnsin∫

udu=−cosux×xdu=∫sinx)xdx=∫sin(lnx⇒dudx=1x⇒dx=xdu∫sinu=lnx)+C(lnu+C=−cos

(xdx (10x1+sin2xcossin∫

x)+C(1+sin2xdx=12lnx1+sin2xcosxdx=12∫2sinx1+sin2xcossin∫

(2ex−2e−x(ex+e−x)2dx (11∫

u=ex+e−x⇒dudx=ex−e−x⇒dx=duex−e−x∫2ex−2e−x(ex+e−x)2dx=∫2(ex−e−x)u2×duex−e−x=∫2u−2du=−2u−1+C=−2ex+e−x+C

(x(x+1)x+1dx (12−∫

u=x+1⟹dx=du,x=u−1∫−x(x+1)x+1dx=∫1−uuudu=∫1−uu32du=∫(u−32−u−12)du=−2u−12−2u12+C=−2(x+1)−12−2(x+1)12+C=−2x+1−2x+1+C

(xx+103dx (13∫

u=x+10⇒dx=du,x=u−10∫xx+103dx=∫(u−10)u13du=∫(u43−10u13)du=37u73−152u43+C=37(x+10)73−152(x+10)43+C=37(x+10)73−152(x+10)43+C

(x2)dx (14x2tan7sec2)∫

x2dx=∫sec2x2tan7x2∫sec2x2⇒dx=2dusec2x2⇒dudx=12sec2u=tan x2+Cx2=2∫u7du=14u8+C=14tan8x2u7×2dusec2

(xdx (15xsecx+esinsec3∫

xxesinxdx+∫cosx)dx=∫sec2xesinx+cosxdx=∫(sec2xsecx+esinsec3∫ xdx+xdx=∫sec2xsecx+esinx∫sec3x⇒dx=ducosx⇒dudx=cosdxu=sin x+Cx+esinx+eu+C=tanx+∫eudu=tanx=tanxeu×ducos∫cos

(xdx (16x3)cos3sin+1)∫

xdx=∫(1+u13)cos3x3)cos3x∫(1+sinx⇒dx=ducosx⇒dudx=cosu=sin x)du=∫(1+u13)(1−u2xdu=∫(1+u13)(1−sin2x=∫(1+u13)cos2xducos)du=∫(1+u13)(1−u2)du=∫(1−u2+u13−u73)du=u−13u3+34u43−3 x+Cx−310sin103x+34sin43x−13sin310u103+C=sin

(xdx (17xsec5sin∫

x∫six⇒dx=du−sinx⇒dudx=−sinxdxu=cosxcos−5xdx=∫sinxsec5sin∫ x+x=−∫u−5du=14u−4+C=14cos−4xu−5×du−sinxdx=∫sinxsec5n x+CC=14sec4

(xdx (18xcos3x+tansin∫

x+sx(secxsecx)dx=∫tanxsec3x+tanxsec2xdx=∫(tanxcos3x+tansin∫ xdxcos3x+tanx∫sinxsecx⇒dx=dutanxsecx⇒dudx=tanx)dxu=secec2 x=∫(u+u2)du=12u2+13u3+C=12secxsecx(u+u2)dutanxsecx=∫tan x+Cx+13sec32

أجد قيمة كلا من التكاملات الآتية:

(2xdx (19x1−cos20π/4sin∫

|2x2x=|sin2x=sin2cos2−1

لكن الزاوية 2x تكون ضمن الربع الأول عندما x<π4>0

لذا فإن 2x>0sin ويكون |2x2x|=sinsin

x⇒xdxu=sinxcos2xdx=∫0π42sin2xsin2xdx=∫0π4sinx1−cos20π4sin∫2xdxx1−cos2xx=0⇒u=0x=π4⇒u=12∫0π4sinx⇒dx=ducosdudx=cosx=∫0122u2du=23u3|012=132xducos=∫0122u2cos

(x2dx (200π/2xsin∫

x2dx=∫0u=x2⇒dudx=2x⇒dx=du2xx=π2⇒u=π24x=0⇒u=0∫0π2xsinπ24−1)≈0.u|0π24=−12(cosudu=−12cosudu2x=12∫0π24sinπ24xsin891

(01x31+x2dx (21∫

u=1+x2⇒dudx=2x⇒dx=du2x,x2=u−1x=0⇒u=1x=1⇒u=2∫01x31+x2dx=∫12x3u×du2x=12∫12x2udu=12∫12u−1udu=12∫12(u12−u−12)du=12(23u32−2u12)|12=12(23(2)32−2(2)12−(23(1)−2(1)))=2−23

(xdx (22xtan50π/3sec2∫

xtxx=0⇒u=0x=π3⇒u=3∫0π3sec2x⇒dx=dusec2x⇒dudx=sec2u=tanx=∫03u5du=16u6|03=92xu5dusec2xdx=∫03sec2an5

(x−1)e(x−1)2dx (23)02∫

u=(x−1)2⇒dudx=2(x−1)⇒dx=du2(x−1)x=0⇒u=1x=2⇒u=1∫02(x−1)e(x−1)2dx=∫11(x−1)eudu2(x−1)=0

(xxdx (24+142∫

u=2+x⇒dudx=12x⇒dx=2xdux=1⇒u=3x=4⇒u=4∫142+xxdx=∫34ux2xdu=∫342udu=43u32|34=4(8−33)3

(0110x(1+x3)2dx (25∫

u=1+x32⇒dudx=32x12⇒dx=23dux12x=0⇒u=1x=1⇒u=2∫0110x(1+x3)2dx=∫1210xu223dux12=203∫12u−2du=−203u−1|12=103

(xdx (26xsin0π/62cos∫

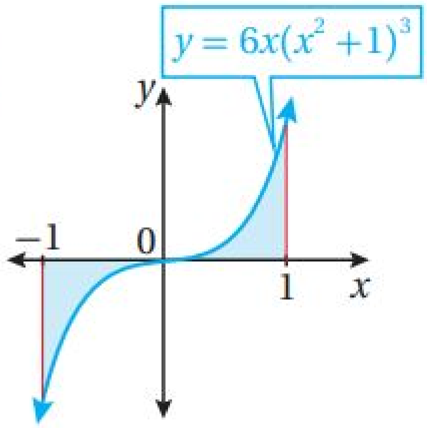
xx=0⇒u=1x=π6⇒u=32∫0π62cosx⇒dx=du−sinx⇒dudx=−sinu=cos 2(2322|132=−1lnx=−∫1322udu=−2ulnxdu−sinxdx=∫1322usinxsin −2)≈0.256

(xdx (27xcot5π/4π/2csc2∫

xx=π2⇒u=0x=π4⇒u=1∫π4π2cx⇒dx=du−csc2x⇒dudx=−csc2u=cot x=∫10−u5du=−16u6|10=16xu5du−csc2xdx=∫10csc2xcot5sc2

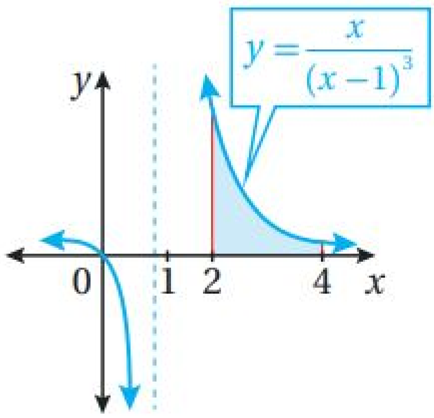
أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلات البيانية الآتية:

28



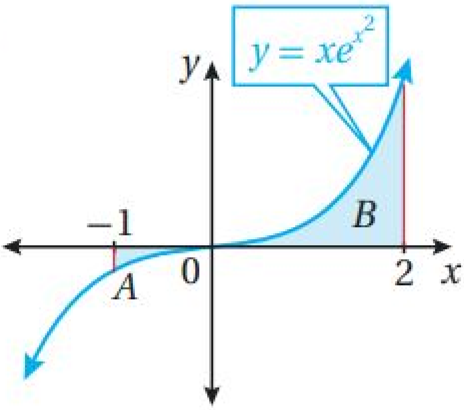
A=−∫−106x(x2+1)3dx+∫016x(x2+1)3dxu=x2+1⇒dudx=2x⇒dx=d u2xx=−1⇒u=2x=0⇒u=1x=1⇒u=2A=−∫216xu3du2x+∫126xu3du2 x=∫123u3du+∫123u3du=∫126u3du=64u4|12=452

29



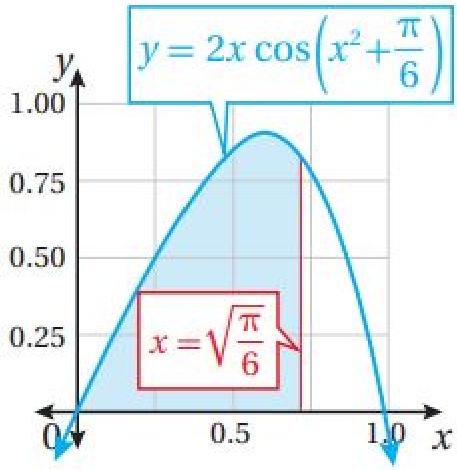
A=∫24x(x−1)3dxu=x−1⇒dx=du,x=u+1x=2⇒u=1x=4⇒u=3A=∫24x (x−1)3dx=∫13u+1u3du=∫13(u−2+u−3)du=(−u−1−12u−2)|13=− 13−12(19)+1+12=109

30



u=x2⟹dudx=2x⟹dx=du2xx=−1⇒u=1x=0⇒u=0x=2⇒u=4A=−∫−10xex2dx+∫02xex2dx=−∫10xeudu2x+∫04xeudu2x=−∫1012eudu+∫0412eudu=−12eu|10+12eu|04=−12e0+12e1+12e4−12e0=12(e4+e)−1≈27.658

31



(u=x2+π6⇒dudx=2x⇒dx=du2xx=π6⇒=π3x=0⇒u=π6A=∫0π62xcos x2+π6)dx=∫π6π32xcos sinudu2x=∫π6π3cosudu=sinu|π6π3=sinπ3−sinπ6=32−12=3−12≈0.366

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران f(x)، ونقطة يمر بها منحنى y=f(x).
أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران f(x):

32) f′(x)=2x(4x2−10)2;(2,10)

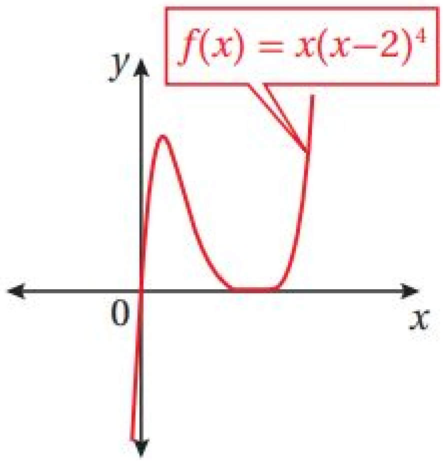
f(x)=∫f′(x)dx=∫2x(4x2−10)2dxu=4x2−10⇒dudx=8x⇒dx=du8xf(x)=∫2xu2du8x=∫u2du4=14∫u2du=112u3+C⇒f(x)=112(4x2−10)3+Cf(2)=112(216)+C=10⇒C=−810=18+C⇒C=−8⇒f(x)=112(4x2−10)3−

8

(f′(x)=x2e−0.2x3;(0,32) (33

$f(x)=∫f′(x)dx=∫x2e−0.2x3dxu=−0.2x3⇒dudx=−0.6x2⇒dx=du−0.6x2f(x)=∫x2eudu−0.6x2=−106∫eudu=−53eu+C⇒f(x)=−53e−0.2x3+Cf(0)=−53+C32=−53+C⇒C=196⇒f(x)=−53e−0.2x3+196$

يـبين الشكـل المجـاور جـزءاً مـن منحنـى الاقتـران :f(x)=x(x−2)4



(34) أجد إحداثي نقطة تماس الاقتران مع المحور x

نجد أصفار الاقتران بحل المعادلة f(x)=0

$x(x−2)4=0⇒x=0,x=2$

نقطة التقاطع 0,0، فتكون نقطة التماس (2,0)

ويمكن التحقق بحساب f′(2)):

$f′(x)=(x−2)4+4x(x−2)3f′(2)=(2−2)4+4(2)(2−2)3=0$

(35) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران f(x)) والمحور x

$A=∫02x(x−2)4dxu=x−2⇒dx=du,x=u+2x=0⇒u=−2x=2⇒u=0A=∫02x(x−2)4dx=∫−20(u+2)u4du=∫−20(u5+2u4)du=(16u6+25u5)|−20=0−(16(−2)6+25(−2)5)=3215$

(36) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:
ωtωtcos2v(t)=sin، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية،

وbbb ثابت، إذا انطلق الجسيم من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية.

ωts(t)=ωt⇒dt=du−ωsinωt⇒dudx=−ωsinωtdtu=cosωtcos2s(t)=∫sin ωt+Cωt=−1ω∫u2du=−13ωu3+C⇒s(t)=−130cos3ωtu2du−ωsin∫sin

لكن s(0)=0 لأن الجسيم انطلق من نقطة الأصل.

ωt+13ωs(0)=−13ω+C0=−13ω+C⇒C=13ω⇒s(t)=−13ωcos3

(37) طب: يمثل الاقتران C(t) تركيز دواء في الدم بعد t دقيقة من حقنه في جسم مريض، حيث C مقيسة بالمليغرام لكل سنتيمتر مكعب (mg/cm3)، إذا كان تركيز الدواء لحظة حقنه في جسم المريض 0.5mg/cm3، وأخذ يتغير بمعدل C′(t)=−0.01e−0.01t(1+e−0.01t)2، فأجد C(t).

C(t)=∫C′(t)dt=∫−0.01e−0.01t(1+e−0.01t)2dtu=1+e−0.01t⇒dudt= −0.01e−0.01t⇒dt=du−0.01e−0.01tC(t)=∫−0.01e−0.01tu2×du−0.01e−0.01t=∫u−2du=−u−1+K

(استعمل الرمز K لثابت التكامل بدل C المعتاد لتمييز ثابت التكامل عن رمز الاقتران C):

C(t)=−(1+e−0.01t)−1+KC(0)=−(2)−1+K12=−12⇒K=1⇒C(t)=−(1+e−0.01t)−1+1C(t)=−11+e−0.01t+1

(38) أجد قيمة ∫4e4xex−2dx3lnln، ثم اكتب الإجابة بالصيغة الآتية: dab+cln، حيث a,b,c,d ثوابت صحيحة.

3−2=3−2=1x=l3⇒u=elnu=ex−2⇒dudx=ex⇒dx=duexex=u+2x=ln 4e4xex−2dx=∫12e4xuduex=∫12e3xud3ln4−2=4−2=2∫ln4⇒u=elnn u=∫12(u+2)3udu=∫12u3+6u2+12u+8udu=∫12(u2+6u+12+8u)du |u|)|12=(13u3+3u2+12u+8ln

(39) إذا كان: xf′(x)=tan، وكان: f(3)=5، فأثبت أن f(x)=ln|cos|cos53+|x.

3|+C5=−ln|cosx|+Cf(3)=−ln|cosxdx=−lnxcosxdx=−∫−sinf(x)=∫tan

$x|+53\cos|\cos3|=\ln|\cos x|+5+\ln|\cos3|f(x)=-\ln|\cos3|+C\Rightarrow C=5+\ln|\cos$