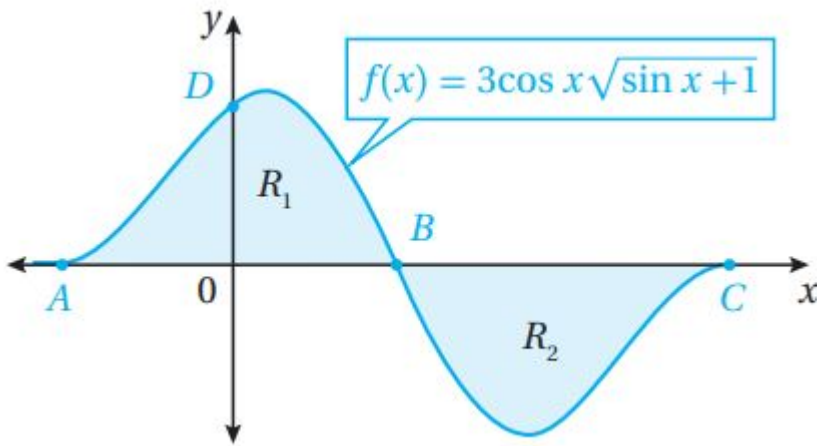


مهارات التفكير العليا

التكامل بالتعويض



تبرير: إذا كان الشكل المجاور
بمثل منحنى الاقتران:
 $f(x) = 3\cos x \sqrt{\sin x + 1}$ ، فأجيب
عن الأسئلة الآتية تبعاً:

(40) أجد إحداثي كل من النقاط: A, B, C, D.

$$x = 0 \Rightarrow x = \pi/2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, x = 3\pi/2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 0 \Rightarrow \cos x = 1, \sin x = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow 3\cos x = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow x = 3\pi/2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

يوجد عدد لا نهائي من الحلول لهاتين المعادلتين، نريد أصغر حلين موجبين (الإحداثي
x للنقطتين B, C) وأكبر حل سالب (الإحداثي x للنقطة A).

أصغر حلين موجبين هما: $x = \pi/2, x = 3\pi/2$ ، بوضع $n = 0$

$$(B(\pi/2, 0), C(3\pi/2, 0) \Rightarrow$$

أكبر حل سالب هو: $x = -\pi/2$ ، بوضع $n = -1$

$$(A(-\pi/2, 0) \Rightarrow$$

أما النقطة D فإحداثياها هما: $(D(0, f(0))) = (0, 3)$

(41) أجد مساحة المنطقة المظللة.

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x) dx$$

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\cos x \sqrt{\sin x + 1} dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} 3\cos x \sqrt{\sin x + 1} dx$$

$$u = 1 + \sin x \Rightarrow du = \cos x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$A = 3 \int_{0}^2 \cos x \sqrt{u} \frac{du}{\cos x} + 3 \int_{0}^{-2} \cos x \sqrt{u} \frac{du}{\cos x}$$

$$A = 3 \int_{0}^2 \sqrt{u} du + 3 \int_{0}^{-2} \sqrt{u} du = 6 \int_{0}^2 \sqrt{u} du - 6 \int_{0}^2 \sqrt{u} du$$

$$A = 4u^{3/2} \Big|_0^2 - 4u^{3/2} \Big|_0^2 = 4(2^{3/2} - 0) - 4(2^{3/2} - 0) = 8 - 8 = 0$$

(42) أبين أن للمنطقة R_1 والمنطقة R_2 المساحة نفسها.

من حل السؤال السابق نجد أن:

$$\int_0^{\pi/2} (3\cos x + \sin x) dx = \int_0^{\pi/2} (3\cos x + \sin x) dx = 42 \Rightarrow A(R_1) = A(R_2)$$

(43) تحدد: أجد قيمة: $\int_0^1 (16x^3 + x^4) dx$.

$$u = 1 + x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}, x^3 = u - 1 \Rightarrow u = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{u-1}$$

$$\int_0^1 (16x^3 + x^4) dx = \int_1^8 (16(u-1)^{3/2} + (u-1)^2) \cdot \frac{du}{3(u-1)^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{3} \int_1^8 (16(u-1)^{3/2} + (u-1)^2) (u-1)^{-2/3} du = \frac{1}{3} \int_1^8 (16(u-1)^{1/2} + (u-1)^{4/3}) du$$

$$= \frac{1}{3} \left[32(u-1)^{3/2} + \frac{3}{7}(u-1)^{7/3} \right]_1^8 = \frac{1}{3} \left(32(7)^{3/2} + \frac{3}{7}(7)^{7/3} - 0 \right)$$

(44) تبرير: إذا كان f اقتراناً متصلاً، فأثبت أن: $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$.

$$u = \pi - x \Rightarrow du = -dx, \sin x = \sin(\pi - u) = \sin u$$

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_{\pi/2}^0 f(\sin u) (-du) = \int_0^{\pi/2} f(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

(45) تبرير: إذا كان a, b عددين حقيقيين موجبين، فأثبت أن: $\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$.

bbb

تحدد: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(46) $\int_0^1 (\ln x) dx$

bbb

(47) $\int_0^{\pi/2} (\cos x \sin x - \cos^2 x) dx$

bbb

(48) $\int_0^1 (2x^3 + 1 + \sin x) dx$

bbb