

## أتحقق من فهمي التكامل بالأجزاء

### التكامل بالأجزاء

أتحقق من فهمي صفحة (63):

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\int x \sin x \, dx$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x - \int -\cos x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3} \int x^3 \ln x \, dx = \frac{1}{3} \int x^3 \ln x \, dx = \frac{1}{3} \int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3} \int x^2 \ln u \, du = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} u^3 \ln u - \int \frac{1}{3} u^2 \, du \right) = \frac{1}{9} u^3 \ln u - \frac{1}{9} u^3 + C$$

$$\int (2x^7 - 3x) \, dx$$

ملاحظة: يمكن حل هذه المسألة بطريقة التعويض  $u = 7 - 3x$  أو  $u = 7 - 3x$

وتالياً حلها بالأجزاء:

$$\int (2x^7 - 3x) \, dx = \int (7 - 3x)^2 \, dx = \int (7 - 3x)^2 \, dx = -\frac{29}{32} (7 - 3x)^2 \int x^7 - 3x \, dx = -\frac{29}{32} (7 - 3x)^2 - \frac{41}{35} (7 - 3x)^5 + C$$

$$\int 3x e^{4x} \, dx$$

$$\int 3x e^{4x} \, dx = \frac{3}{4} \int x e^{4x} \, dx = \frac{3}{4} \left( \frac{1}{4} e^{4x} \int x \, dx - \int \frac{1}{4} e^{4x} \, dx \right) = \frac{3}{16} e^{4x} x - \frac{3}{16} e^{4x} + C$$

تكرار التكامل بالأجزاء

أتحقق من فهمي صفحة (64):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$\int x dx \quad \int (ax^2 \sin f)$$

$$\begin{aligned} x dx - \int -2x \cos x dx &= -x^2 \cos x + \int x^2 \sin x dx \quad u = 2x \quad dv = -\cos u = x^2 \quad dv = \sin \\ x \int x^2 \sin x dx \quad u &= 2x \quad dv = \sin x \quad dx \quad u = 2x \quad dv = \cos x + \int 2x \cos x dx = -x^2 \cos x + \int x^2 \sin \\ x + Cx + 2 \cos x + 2x \sin x dx &= -x^2 \cos x - \int 2 \sin x + 2x \sin x dx = -x^2 \cos x \end{aligned}$$

$$\int x^3 e^{4x} dx \quad \int (b)$$

$$\begin{aligned} u = x^3 \quad dv = e^{4x} \quad dx \quad u &= 3x^2 \quad dv = 14e^{4x} \int x^3 e^{4x} dx = 14x^3 e^{4x} - \int 34x^2 e^{4x} \\ x u = 34x^2 \quad dv = e^{4x} \quad dx \quad u &= 32x \quad dv = 14e^{4x} \int x^3 e^{4x} dx = 14x^3 e^{4x} - 316x^2 e \\ 4x + \int 38x e^{4x} dx \quad u &= 38x \quad dv = e^{4x} \quad dx \quad u = 38 \quad dv = 14e^{4x} \int x^3 e^{4x} dx = 14x^3 e \\ 4x - 316x^2 e^{4x} + 332x e^{4x} - \int 332 e^{4x} dx &= 14x^3 e^{4x} - 316x^2 e^{4x} + 332x e^{4x} \\ x - 3128 e^{4x} + C \end{aligned}$$

## التكاملات الدورية

أتحقق من فهمي صفحة (66):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$\int x e^x dx \quad \int (a \sin f)$$

$$\begin{aligned} x e^x dx \quad v = -e^{-x} \int \sin x dv &= e^{-x} dx \quad du = \cos x e^{-x} dx \quad u = \sin x e^x dx = \int \sin x \sin f \\ x dx e^{-x} + \int e^{-x} \cos x e^{-x} dx &= -\sin x dx \int \sin x e^{-x} - \int -e^{-x} \cos - x dx = -\sin \\ x e^{-x} + e^{-x} e^{-x} dx &= -\sin x dx \quad v = -e^{-x} \int \sin x dv = e^{-x} dx \quad du = -\sin x u = \cos \\ x e^{-x} dx + C \int \sin x + \cos x e^{-x} dx &= e^{-x} (-\sin x dx \Rightarrow 2 \int \sin x - \int e^{-x} \sin x \cos \\ x) + Cx + \cos &= 13e^{-x} (-\sin \end{aligned}$$

$$\int x dx \quad \int (b \sec^3 f)$$

$$\begin{aligned} x - \int \sec^2 x dx &= \sec x \int \sec^3 x dx \quad v = \tan x \quad dx \quad du = \sec x dv = \sec^2 u = \sec \\ x dx + \int \sec x - \int \sec^3 x \tan x - 1 dx &= \sec x (\sec^2 x - \int \sec x \tan x dx = \sec x \tan^2 c \\ x) \sec x + \tan x (\sec x + \int \sec x \tan x dx &= \sec x + \int \sec x \tan x dx = \sec x dx^2 \int \sec^3 c \end{aligned}$$

$$x + \ln x \tan x dx = \sec x + \tan x \sec x \tan x + \sec x + \int \sec^2 x \tan x dx = \sec x + \tan x \sec x + C$$

تكرار التكامل بالأجزاء باستعمال طريقة الجدول

أتحقق من فهمي صفحة (67):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$\int (4x dx) \cos f$$

نفرض أن:  $f(x) = x^4, g(x) = \cos$ ، استخدم طريقة الجدول للتكامل بالأجزاء:

$f(x)$  ومشتقاته المتكررة

$g(x)$  وتكاملاته المتكررة

$x^4$	+	$\cos 4x$
$4x^3$	-	$\frac{1}{4} \sin 4x$
$12x^2$	+	$-\frac{1}{16} \cos 4x$
$24x$	-	$-\frac{1}{64} \sin 4x$
$24$	+	$\frac{1}{256} \cos 4x$
$0$	-	$\frac{1}{1024} \sin 4x$

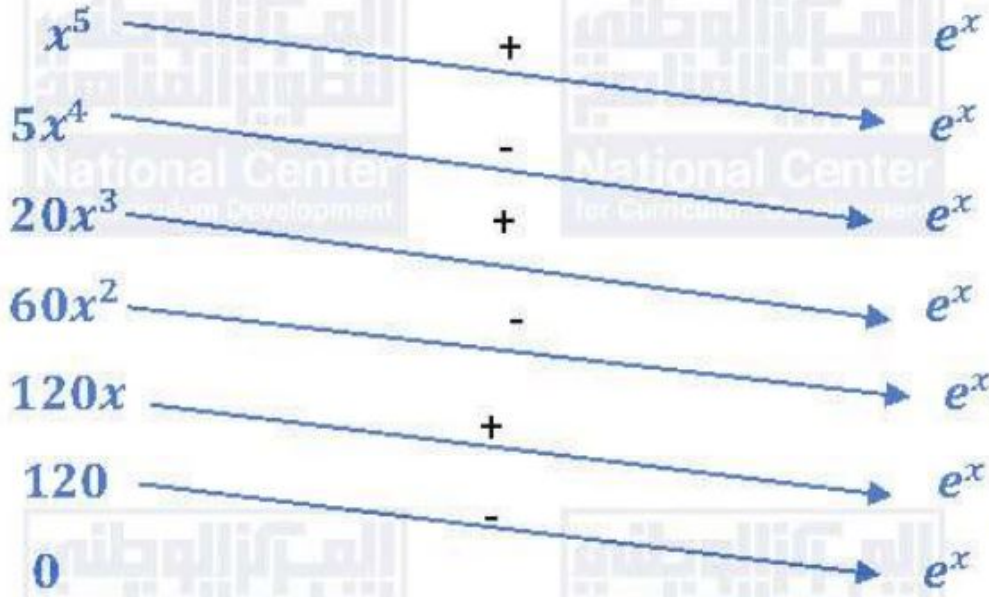
$$\int (4x^4 + 3124x - 332x \cos 4x - 316x^2 \sin 4x + 14x^3 \cos 4x) dx = 14x^4 \sin 4x \cos f$$

$$\int (x^5 e^x dx) \quad (b)$$

نفرض أن:  $f(x) = x^5, g(x) = e^x$ ، استخدم طريقة الجدول للتكامل بالأجزاء:

$f(x)$  ومشتقاته المتكررة

$g(x)$  وتكاملاته المتكررة



$$\int x^5 e^x dx = e^x(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120) + C$$

أتحقق من فهمي صفحة (68):

التكلفة الحدية: يمثل الاقتران:  $C'(x) = (0.1x + 1)e^{0.03x}$  التكلفة الحدية لكل قطعة (بالدينار) تنتج في إحدى الشركات، حيث  $x$  عدد القطع المنتجة، و  $C(x)$  تكلفة إنتاج  $x$  قطعة بالدينار. أجد اقتران التكلفة  $C(x)$ ، علماً بأن  $C(10) = 200$ .

$$\begin{aligned} C(x) &= \int (0.1x + 1)e^{0.03x} dx \\ u &= 0.1x + 1 \quad dv = e^{0.03x} \\ du &= 0.1 dx \quad v = \frac{1}{0.03} e^{0.03x} = 10.03 e^{0.03x} \\ C(x) &= \int (0.1x + 1)e^{0.03x} dx = (0.1x + 1)(10.03 e^{0.03x}) - \int 0.1 \cdot 10.03 e^{0.03x} dx \\ C(x) &= 10.03(x + 10)e^{0.03x} - 1000.9 e^{0.03x} + C \\ C(10) &= 200 \Rightarrow 10.03(20)e^{0.3} - 1000.9 e^{0.3} + C = 200 \\ C &\approx 260 \Rightarrow C(x) = 10.03e^{0.03x}(x - 70.3) + 260 \end{aligned}$$

التكامل بالأجزاء لتكاملات محدودة

أتحقق من فهمي صفحة (70):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$\int x^2 dx \quad \int a^x dx$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int (0.1x e^{-2x}) dx$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$\int 0.1x e^{-2x} dx = 0.1 \int x e^{-2x} dx$$

$$= 0.1 \left( -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \int -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} dx \right)$$

$$= -\frac{0.1}{2} x^2 e^{-2x} + \frac{0.1}{2} \int x^2 e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{0.1}{2} x^2 e^{-2x} + \frac{0.1}{2} \left( -\frac{1}{2} x^3 e^{-2x} - \int -\frac{1}{2} x^3 e^{-2x} dx \right)$$

$$= -\frac{0.1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{0.1}{4} x^3 e^{-2x} + \frac{0.1}{4} \int x^3 e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{0.1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{0.1}{4} x^3 e^{-2x} + \frac{0.1}{4} \left( -\frac{1}{2} x^4 e^{-2x} - \int -\frac{1}{2} x^4 e^{-2x} dx \right)$$

$$= -\frac{0.1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{0.1}{4} x^3 e^{-2x} - \frac{0.1}{8} x^4 e^{-2x} + \frac{0.1}{8} \int x^4 e^{-2x} dx$$

التكامل بالأجزاء، والتكامل بالتعويض

أتحقق من فهمي صفحة (71):

أجد قيمة كل من التكاملين الآتيين:

$$\int (x^2 dx (ax^3 + x^5) \sin)$$

$$\int x^2 dx (ax^3 + x^5) \sin$$

نجد كل تكامل على حدة. فنجد التكامل الأيسر كما يأتي:

$$y dy = y dy \Rightarrow \int y dy = \frac{1}{2} y^2 + C$$

$$\int x^2 \sin x^2 dx = \int x^3 \sin x^2 dx$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\int x^3 \sin x^2 dx = \int \frac{1}{2} u \sin u du = \frac{1}{2} \int u \sin u du$$

$$= \frac{1}{2} \left( -u \cos u + \int \cos u du \right) = -\frac{1}{2} u \cos u + \frac{1}{2} \sin u + C$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos x^2 + \frac{1}{2} \sin x^2 + C$$

ونجد التكامل الأيمن كما يأتي:

$$y dy dy u = y^2 dv = \sin y dy = \int y^2 \sin y dy$$

$$= \int x^4 \sin x^2 dx = \int x^5 \sin x^2 dx$$

$$y + 2y \sin y dy = -y^2 \cos y - \int -2y \cos y dy = -y^2 \cos y + \int 2y \sin y dy = -y^2 \cos y - 2 \int \sin y dy$$

$$= -y^2 \cos y + 2 \sin y + C$$

$$x^2 + x^2 \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} x^4 \cos x^2 + \frac{1}{2} x^5 \sin x^2 + 2 \cos x^2 + 2 \sin x^2 dy = -\frac{1}{2} x^4 \cos x^2 - 2 \int \sin x^2 dx$$

$$= -\frac{1}{2} x^4 \cos x^2 + \frac{1}{2} x^5 \sin x^2 + 2 \cos x^2 + C$$

$$\int (x^3 + x^5) \sin x^2 + \cos x^2 + C x^2 + \cos x^2 \sin$$

$$\int (x^5 e^{x^2}) dx$$

$$y = x^2 \Rightarrow dy dx = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$$

$$\int x^5 e^{x^2} dx = \int x^4 e^y \frac{dy}{2x} = \frac{1}{2} \int x^3 e^y dy$$

$$= 12 \int y^2 e^y dy = y^2 dv = e^y dy du = 2y dy v = e^y \int y^2 e^y dy = y^2 e^y - \int 2y e^y dy = y^2 e^y - 2y e^y + \int 2e^y dy = y^2 e^y - 2y e^y + 2e^y = (y^2 - 2y + 2)e^y \int x^5 dx = (12x^4 - x^2 + 1)e^{x^2} + C$$