مهارات التفكير العليا

المساحات والحجوم

تبرير: أجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

(22) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $y=x^{1/2}, \cdot y=x^2$.

$$x^2=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x^4=x \Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x(x^3-1)=0 \Rightarrow x=0, x=1$$
$$A=\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}}-x^2\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$$

(23) أجد المساحة المحصورة بين منحتيي الاقترانين: $y=x^{1/3}, \cdot y=x^3$.

$$x^3=x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x^9=x \Rightarrow x^9-x=0 \Rightarrow x(x^8-1)=0 \Rightarrow x(x^4-1)(x^4+1)=0 \Rightarrow x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)=0 \Rightarrow x=0, x=-1, x=1$$
$$\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{8}\right)^3=\frac{1}{512} \Rightarrow x^{\frac{1}{3}}>x^3, 0<x<1$$
$$\left(-\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=-\frac{1}{2}, \left(-\frac{1}{8}\right)^3=-\frac{1}{512} \Rightarrow x^3>x^{\frac{1}{3}}, -1<x<0$$
$$A=\int_{-1}^0 \left(x^3-x^{\frac{1}{3}}\right)dx+\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}}-x^3\right)dx=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right)\Big|_{-1}^0+\left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1=0-\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-0=1$$

(24) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين : $y=x^{1/n}, y=x^n$، حيث n عدد صحيح أكبر من أو يساوي 2، مبرراً إجابتي.

أولاً إذا كان n زوجياً

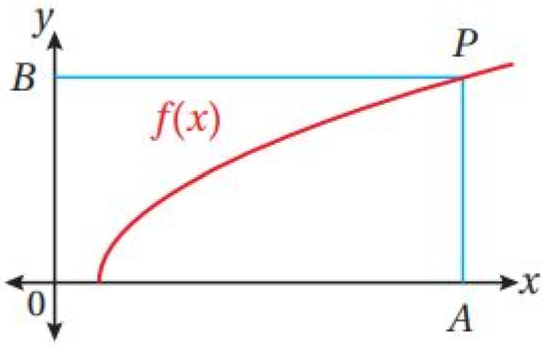
يتقاطع المنحنيان عند $x=0, x=1$

$$A=\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{n}}-x^n\right)dx=\left(\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{\frac{1}{n}+1}-\frac{1}{n+1}-0=\frac{n}{n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n-1}{n+1}$$

ثانياً إذا كان n فردياً

يتقاطع المنحنيان عند $x=0, x=1, x=-1$

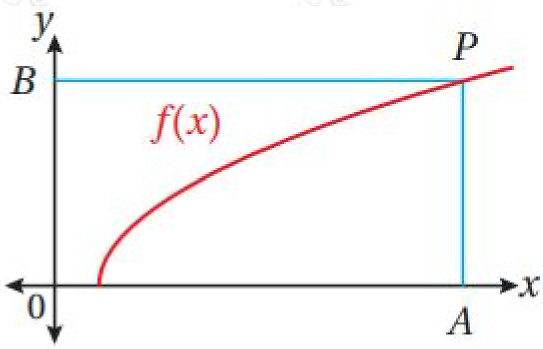
$$A=\int_{-1}^0 \left(x^n-x^{\frac{1}{n}}\right)dx+\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{n}}-x^n\right)dx=\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}\right)\Big|_{-1}^0+\left(\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_0^1=0-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\right)+\frac{1}{\frac{1}{n}+1}-\frac{1}{n+1}-0$$
$$=\frac{-1+n}{n+1}+\frac{n-1}{n+1}=\frac{2(n-1)}{n+1}$$



تبرير: يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x)=\sqrt{2x-2}$، حيث: $x\geq 1$. إذا كانت النقطة $P(9,4)$ تقع على منحنى الاقتران $f(x)$، حيث $\overline{PA}$ يوازي المحور y، و$\overline{PB}$ يوازي المحور x، فأجد كلاً مما يأتي:

(25) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمستقيم $y=4$ والمحورين الإحداثيين.

$2x-2=0 \Rightarrow x=1$



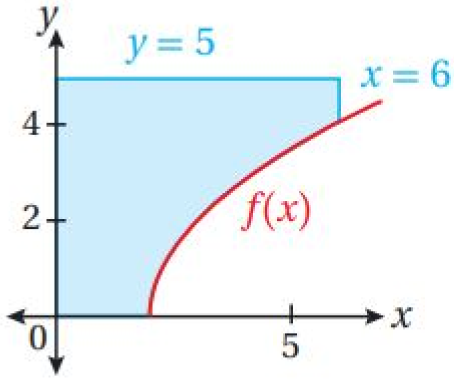
نقسم المنطقة المطلوب حساب مساحتها إلى قسمين برسم المستقيم $x=1$، ونجد المساحة كما يأتي:

$$A=\int_0^1 4\,dx+\int_1^9 \left(4-\sqrt{2x-2}\right)dx=(4x)\Big|_0^1+\left(4x-\frac{1}{3}(2x-2)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^9=4-0+36-\frac{1}{3}(16)^{\frac{3}{2}}-(4-0)=\frac{44}{3}$$

(26) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمستقيم $x=9$، والمحور x.

$$A=\int_1^9 \sqrt{2x-2}\,dx=\frac{1}{3}(2x-2)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9=\frac{1}{3}\left((16)^{\frac{3}{2}}-0\right)=\frac{64}{3}$$

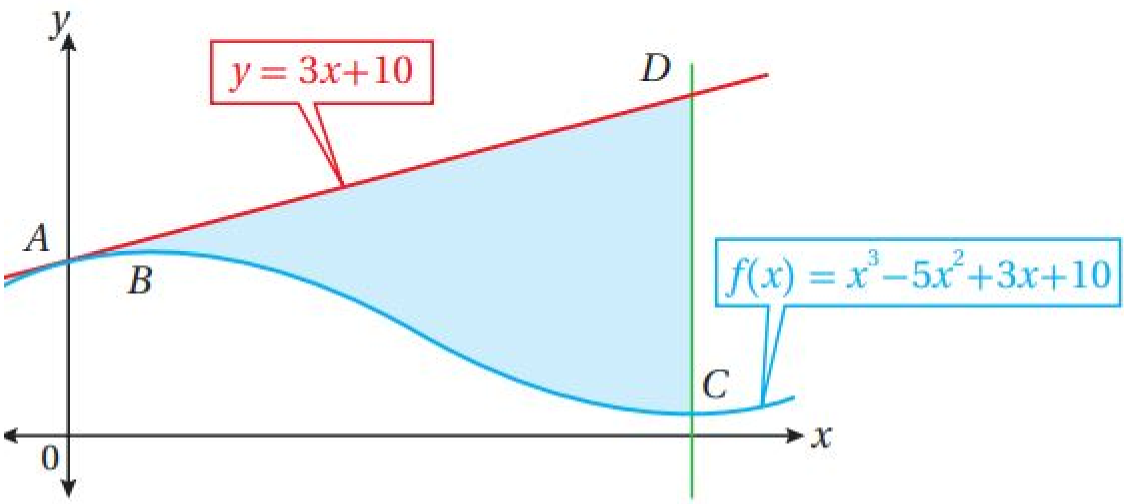
(27) تبرير: بين الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين المحورين الإحداثيين في الربع الأول، ومنحنى الاقتران: f(x)=2x−2، والمستقيمين: x=6,y=5. أجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة حول المحور bbb، مبرراً إجابتي.



2x−2=0⇒x=2

نقسم المنطقة إلى قسمين برسم المستقيم x=2، ونجد الحجم كما يأتي:

V=π∫0252dx+π∫26(52−(2x−2)2)dx=π∫0225dx+π∫26(25−(4x−8)dx =50π+π∫26(33−4x)dx=50π+π(33x−2x2)|26=50π+π(33(6)−72−66 +8)|=118π



تبرير: يبين الشكل المجاور منحنى كل من الاقتران: f(x)=x3−5x2+3x+10، و المستقيم: y=3x+10. إذا مر المستقيم ومنحنى الاقتران بالنقطة A الواقعة على المحور y، وكان للاقتران f(x) قيمة عظمى محلية عند النقطة B، وقيمة صغرى محلية عند النقطة C، وقطع الخط الموازي للمحور y والمار بالنقطة C المستقيم: y=3x+10 في النقطة D؛ فأجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

(28) أجد إحداثيات كل من النقطة B، والنقطة C.

y=x3−5x2+3x+10f′(x)=3x2−10x+3=0⇒(3x−1)(x−3)=0⇒x=13,x= 3

نقطة القيمة العظمى هي:

(B(13,f(13))=(13,28327

نقطة القيمة الصغرى هي:

(C(3,f(3))=(3,1

(29) أثبت أن AD¯ مماس لمنحنى الاقتران f(x) عند النقطة A، مبرراً إجابتي.

النقطة A تقع على محور y إذن أحداثياها هما:

(A(0,f(0))=(0,10

ميل المنحنى عند A هو:

dydx|x=0=0−0+3=3

معادلة مماس المنحنى f(x) عند النقطة A هي (حيث f′(0)=3):

y−10=3(x−0)⇒y=3x+10

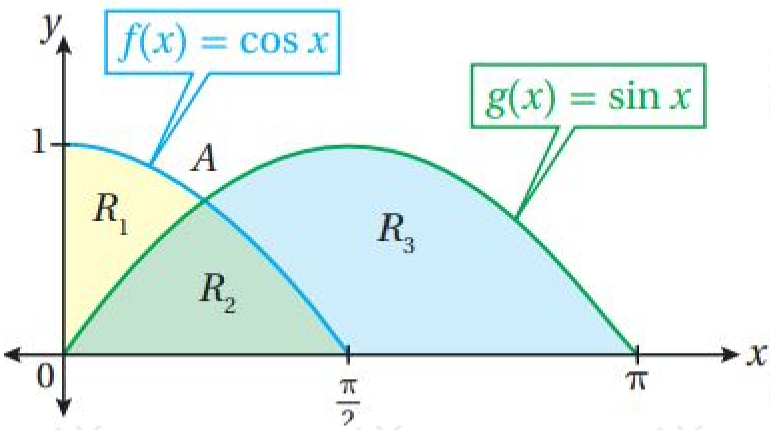
وهذه المعادلة هي معادلة المستقيم AD↔ نفسها.

إذن، AD↔ مماس لمنحنى f(x) عند النقطة A

(30) أجد مساحة المنطقة المظللة، مبرراً إجابتي.

A=∫03(3x+10−(x3−5x2+3x+10))dx=∫03(5x2−x3)dx=(53x3−14x4)|03=45−814−0=994

تبرير: يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: xx,h(x)=sinf(x)=cos، معتمداً هذا الشكل، أجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:



(31) أجد إحداثيي النقطة A.

$x=1\Rightarrow x=\pi 4 \text{ or } x=5\pi 4x\Rightarrow \tan x=\sin f(x)=g(x)\Rightarrow \cos$

نلاحظ من الرسم المعطى x تقع في الفترة $(\pi 2,0)$

إذن، إحداثيا النقطة A هما: $(\pi 4,f(\pi 4))=(\pi 4,12)$

(32) أجد مساحة كل من المناطق: R1,R2,R3.

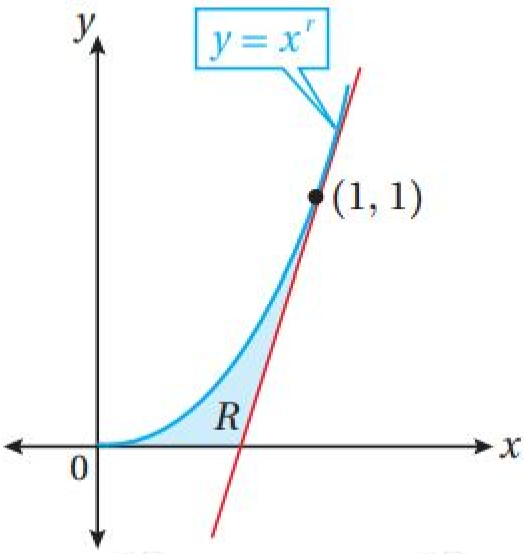
$x)|0\pi 4=12+12-(0+1)=2-1A(x+\cos x)dx=(\sin x-\sin A(R1)=\int 0\pi 4(\cos$
$x|\pi 4\pi 2=-12+1+1-x|0\pi 4+\sin xdx=-\cos xdx+\int \pi 4\pi 2\cos R2)=\int 0\pi 4\sin$
$x)|\pi 4\pi x-\sin xdx=(-\cos x)dx+\int \pi 2\pi \sin x-\cos 12=2-2A(R3)=\int \pi 4\pi 2(\sin$
$x)|\pi 2\pi=2=-0-1-(-12-12)+(-(-1)+0)=22+(-\cos$

(33) أثبت أن مساحة المنطقة R1 إلى مساحة المنطقة R2 تساوي: 2:2.

$A(R1)A(R2)=2-12-2=2-12(2-1)=12=22$

إذن: $A(R1):A(R2)=2:2$

تحد: يبين الشكل المجاور المنطقة R المحصورة بين منحنى الاقتران: $y=xr$ حيث: $r>1$، والمحور x، ومماس منحنى الاقتران عند النقطة (1,1):



(34) أثبت أن مماس منحنى الاقتران يقطع المحور x عند النقطة $(r-1r,0)$.

$y=xr,y'=rxr-1$

ميل المماس عند (1,1) هو:

$bbby'|x=1=r(1)r-1=r$

معادلة المماس هي:

$y-1=r(x-1)\Rightarrow y=rx+1-r$

لإيجاد المقطع x لهذا المماس نضع y=0 في معادلته:

$rx+1-r\Rightarrow x=r-1r=0$

إذن، يقطع هذا المماس المحور x في النقطة (r−1r,0)

(35) أستعمل النتيجة من الفرع السابق لإثبات أن مساحة المنطقة R هي (r−12r(r+1 وحدة مربعة.

مساحة المنطقة R تساوي المساحة بين المنحنى والمحور x والمستقيمين x=0,x=1 مطروحاً منها مساحة المثلث الذي رؤوسه (r−1r,0),(1,1),(1,0) أي أن (A(R هي:

$A(R)=\int 01xrdx-12(1-r-1r)(1)=xrr+1|01-12r=1r+1-12r=2r-r-12$
$(r(r+1)=r-12r(r+1$

(36) أجد قيمة الثابت r التي تجعل مساحة المنطقة R أكبر ما يمكن.

$A(r)=r-12r2+2r,r\geq 1A'(r)=2r2+2r-(r-1)(4r+2)(2r2+2r)2=-2(r2-2r$
$-1)(2r2+2r)2=0\Rightarrow r2-2r-1=0\Rightarrow r=2\pm 82=2\pm 222=1\pm 2$

ولأن r≥1 تكون قيمة الحرجة 2+1

إذن، قيمة r التي تجعل المساحة أكبر ما يمكن هي: r=1+2

تحد: إذا كان العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: f(x)=x2−4x+6 عند النقطة (1,3) يقطع منحنى الاقتران مرة أخرى عند النقطة P، فأجد كلاً مما يأتي:

(37) إحداثيات النقطة P.

$f'(x)=2x-4$

ميل المماس عند النقطة (1,3) هو:

$f'(1)=-2$

ميل العمودي على المماس عند النقطة (1,3) هو: 12

معادلة العمودي:

y−3=12(x−1)⇒y=12x+52

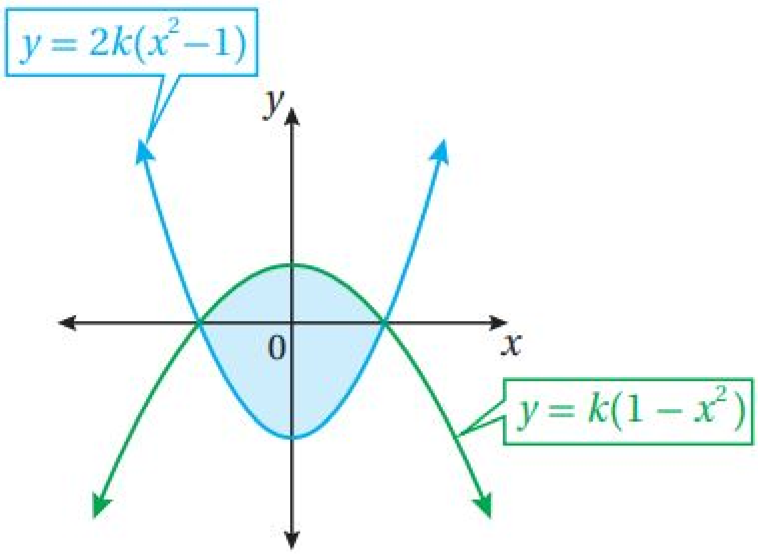
نجد نقاط تقاطع المنحنى والعمودي على المماس:

x2−4x+6=12x+52⇒2x2−9x+7=0⇒(2x−7)(x−1)=0⇒x=72,x=1⇒P(7
(2,f(72))=(72,174

(38) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران f(x) والعمودي على المماس، مقرباً إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية.

A=∫172(12x+52−(x2−4x+6))dx=∫172(92x−72−x2)dx=(94x2−72x
−13x3)|172=(94(72)2−72(72)−13(72)3)−(94−72−13)=12548≈2.6
04

(39) تبرير: المنطقة المظللة في الشكل المجاور محصورة بين قطعين مكافئين، يقطع كل منهما المحور x، عندما x=-1,x=1. إذا كانت معادلتا القطعين هما: (y=2k(x2−1),y=k(1−x2، وكانت مساحة المنطقة المظللة هي 8 وحدات مربعة، فأجد قيمة الثابت k.



k(1−x2)−2k(x2−1))dx=8⇒∫−11(k(1−x2)+2k(1−x2))dx=8⇒3k)11−∫
∫−11(1−x2)dx=83k(x−13x3)|−11=83k((1−13)−(−1+13))=83k(2−
23)=83k(43)=8⇒k=2