

أتحقق من فهمي المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية

أتحقق من فهمي صفحة (92):

أحدد إذا كان الاقتران المعطى حلاً للمعادلة التفاضلية: $y'' - 4y' + 3y = 0$ في كل مما يأتي:

$$(a) \quad y = 4e^x + 5e^{3x}$$

$$y' = 4e^x + 15e^{3x} \quad y'' = 4e^x + 45e^{3x} \quad y'' - 4y' + 3y = 4e^x + 45e^{3x} - 4(4e^x + 15e^{3x}) + 3(4e^x + 5e^{3x}) = 0$$

إذن $y = 4e^x + 5e^{3x}$ حل للمعادلة التفاضلية $y'' - 4y' + 3y = 0$

$$(b) \quad y = \sin x$$

$$y' = \cos x \quad y'' = -\sin x \quad y'' - 4y' + 3y = -\sin x - 4\cos x + 3\sin x = 2\sin x - 4\cos x \neq 0$$

إذن $y = \sin x$ ليس حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' - 4y' + 3y = 0$

الحل العام والحل الخاص للمعادلة التفاضلية

أتحقق من فهمي صفحة (94):

أجد الحل العام للمعادلة التفاضلية: $x - 32x \frac{dy}{dx} = 5 \sec^2 x$, ثم أجد الحل الخاص لها الذي يحقق النقطة $(0, 7)$.

$$x - 32x \frac{dy}{dx} = 5 \sec^2 x \implies dy = \frac{5 \sec^2 x - x}{32x} dx \implies \int dy = \int \left(\frac{5 \sec^2 x}{32x} - \frac{x}{32x} \right) dx = \frac{5}{32} \int \frac{\sec^2 x}{x} dx - \frac{1}{32} \int dx$$

الحل العام لهذه المعادلة هو:

$$y = \frac{5}{32} \tan x - \frac{1}{32} x + C$$

لإيجاد الحل الخاص نعوض النقطة $(0, 7)$ في الحل العام:

$$C \Rightarrow C = 7 + 0 - 0 = 7$$

الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يحقق النقطة (0,7) هو:

$$x - x^3 + 7y = 5 \tan$$

حل المعادلات التفاضلية بفصل المتغيرات

أتحقق من فهمي صفحة (96):

أحل كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

(a) $dy/dx = 2xy^4$

$$dy/dx = 2xy^4 \Rightarrow 2x dx = y^4 dy \Rightarrow \int 2x dx = \int y^4 dy \Rightarrow 15y^5 = x^2 + C$$

(b) $dy/dx = 2x - xey$

$$dy/dx = 2x - xey \Rightarrow dy/dx = x(2 - ey) \Rightarrow dy^2 - ey = x dx \Rightarrow \int x dx = \int (2 - ey) x e^{-y} dy$$

$$|2e^{-y} - 1| + C \Rightarrow x^2 = -y dy \Rightarrow \int x dx = -12 \int -2e^{-y} 2e^{-y} - 1 dy \Rightarrow x^2 = -12 \ln |2e^{-y} - 1| + C - \ln$$

(c) $dy/dx = x \sin xy$

$$x dx \Rightarrow \int y dy = \int x \sin xy \Rightarrow y dy = x \sin y dx = x \sin$$

نجد $\int x \sin x dx$ بالأجزاء:

$$x - \int -x dx \Rightarrow 12y^2 = -x \cos x \Rightarrow \int y dy = \int x \sin x dx \Rightarrow du = dx \Rightarrow v = -\cos u = x dv = \sin x + C$$

$$x + C \Rightarrow 12y^2 = -x \cos x$$

(d) $dx/dy = y^2 \cos^2 \sin^2$

$$x dx \Rightarrow \int y - 2 dx \sin^2 x dx dy^2 = \cos^2 x dy = y^2 \cos^2 x \sin^2 x dy dx = y^2 \cos^2 \sin^2$$

$$xx - x + C \Rightarrow 1y = x + \cot x - 1 dx \Rightarrow -1y = -\cot x dx \Rightarrow \int y - 2 dy = \int (\csc^2 y = \int \cot^2 + C$$

أتحقق من فهمي صفحة (98):

أجد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأولي المعطى لكل معادلة تفاضلية مما يأتي:

$$(dy/dx = xy^2e^{2x}, y(0) = 1) \quad (a)$$

$$dy = xy^2e^{2x} dx \int dy y^2 = \int x e^{2x} dx$$

نجد $\int x e^{2x} dx$ بالأجزاء:

$$u = x \quad dv = e^{2x} \quad du = dx \quad v = \frac{1}{2} e^{2x} \Rightarrow \int dy y^2 = \frac{1}{2} x e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx$$

الحل العام هو:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C \Rightarrow$$

بتعويض $(0, 1)$:

$$C \Rightarrow C = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

الحل الخاص هو:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{3}{4}$$

$$(x, y(\pi/2) = 1) \quad (b) \quad dy/dx = y \cos x$$

$$x dx dy = \cos x$$

الحل العام هو:

$$x + C |y| = \sin x \Rightarrow \ln |dy| = \int \cos x$$

بتعويض $(\pi/2, 1)$

$$C \Rightarrow C = -1 + 1 = 0$$

الحل الخاص:

$$x - 1 |y| = \sin x$$

المعادلات التفاضلية والحركة في مسار مستقيم

أتحقق من فهمي صفحة (100):

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالمعادلة التفاضلية: $ds/dt = st + 1$ ، حيث t الزمن بالثواني، و s موقع الجسيم بالأمتار. أجد موقع الجسيم بعد 3 ثوان من بدء الحركة، علماً بأن $s(0) = 1$.

$$ds/dt = st + 1 \Rightarrow ds/s = (t + 1) dt \int ds/s = \int (t + 1) dt \Rightarrow \ln s = t + 1 \Rightarrow s = e^{t+1} \int (t + 1) dt = \int (u - 1) u du = \int (u - 1) u^{1/2} du = \int (u^{3/2} - u^{1/2}) du = \frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{2}{5} (t + 1)^{5/2} - \frac{2}{3} (t + 1)^{3/2} + C$$

الموقع s لا يمكن أن يكون 0 لأن $\ln 0$ غير معرف ولا يمكن أن يكون سالباً لأن $s(0) = 1$ واقتران الموقع متصل، ولذا يمكننا أن نحذف رمز القيمة المطلقة ونعتبر $s = |s| = \ln s$ بتعريض $s = 1$ عندما $t = 0$ ينتج:

$$s = \frac{2}{5} (t + 1)^{5/2} - \frac{2}{3} (t + 1)^{3/2} + 415C \Rightarrow C = 415 \Rightarrow \ln + 25 - 23 = 0$$

نعوض $t = 3$ لنجد s المطلوب:

$$s(3) = 645 - 163 + 415 = 11615 \Rightarrow s(3) = e^{11615} \ln$$

أتحقق من فهمي صفحة (102):



غزلان: يمكن نمذجة معدل تغير عدد الغزلان في إحدى الغابات بالمعادلة التفاضلية: $dP/dt = 120000P(1000 - P)$ ، حيث P عدد الغزلان في الغابة بعد t سنة من بدء دراسة عليها:

(a) أحل المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الغزلان في الغابة بعد سنة من بدء الدراسة، علماً بأن عددها عند بدء الدراسة هو 2500 غزال.

$$dP/dt = 120000P(1000 - P) \int dP/P(1000 - P) = \int 120000 dt$$

بتجزئة الكسر داخل التكامل في الطرف الأيسر:

$$11000P + 11000(1000 - P) dP = \int 120000 dt \int$$

حل عام:

$$|1000 - P| = t|P| - 20 \ln |1000 - P| = 120000t + C20 \ln |P| - 11000 \ln 11000 \ln$$
$$|P|1000 - P| = t + C + C20 \ln$$

بتعويض $P=2500$ عند $t=0$ ينتج:

$$53|P|1000 - P| = t + 20 \ln 53 \Rightarrow 20 \ln 25001500 = 20 \ln C = 20 \ln$$

(b) بعد كم سنة يصبح عدد الغزلان في الغابة 1800 غزال؟

نعويض $P=1800$ في المعادلة الأخيرة:

$$2720 \approx 653 \Rightarrow t = 20 \ln(94) = t + 20 \ln 20 \ln \Rightarrow$$

إذن، يصبح عدد الغزلان 1800 غزال بعد 6 سنوات تقريباً من بدء الدراسة.