# أتحقق من فهمي

## الضرب القياسي

### الضرب القياسي للمتجهات في الفضاء

أتحقق من فهمي صفحة (144):

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

(a $\vec{v}=\langle 4,8,-3\rangle, \vec{w}=\langle -3,7,2\rangle$

$\vec{v}\cdot\vec{w}=4(-3)+8(7)-3(2)=-12+56-6=38$

(b $\vec{m}=-3\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}, \vec{n}=-12\hat{i}+6\hat{j}-8\hat{k}$

$\vec{m}\cdot\vec{n}=-3(-12)+5(6)-1(-8)=36+30+8=74$

---

### الزاوية بين متجهين في الفضاء

أتحقق من فهمي صفحة (146):

أجد قياس الزاوية θ بين المتجه $\vec{u}$ والمتجه $\vec{w}$ في كل مما يأتي، مقرباً الناتج إلى أقرب عشـر درجة:

(a $\vec{u}=-3\hat{i}+5\hat{j}-4\hat{k}, \vec{w}=4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$

(u→·bbb|u→|=9+25+16=50|w→|=16+4+9=29u→·w→=−3(4)+5(2)−4(−3)=−12+10+12=10θ=cos−1
∘(101450)≈74.8(1050×29)=cos−1w→|u→||w→|)=cos−1

(b $\vec{u}=\langle 2,-10,6\rangle, \vec{w}=\langle -3,15,-9\rangle$

u→|=4+100+36=140|w→|=9+225+81=315u→·w→=2(−3)−10(15)+6(9)=−6−150−54=−210θ=cos|
∘(−1)=180(−21044100)=cos−1(−210140×315)=cos−1(u→·w→|u→||w→|)=cos−1−1

---

### الزاوية بين مستقيمين في الفضاء

أتحقق من فهمي صفحة (147):

إذا كانت: $\vec{r}=\langle 3, -2, 1\rangle + t\langle 2, -5, -1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l1، وكانت: $\vec{r}=\langle 5, 3, 0\rangle + u\langle 1, 0, -3\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l2، فأجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم l1 والمستقيم l2 إلى أقرب درجة.

اتجاه المستقيم l1 هو $\vec{v}=\langle 2,-5,-1\rangle$ واتجاه المستقيم l2 هو $\vec{u}=\langle 1,0,-3\rangle$

$|\vec{v}|=\sqrt{4+25+1}=\sqrt{30}$ $|\vec{u}|=\sqrt{1+0+9}=\sqrt{10}$ $\vec{v}\cdot\vec{u}=1(2)+0(-5)-3(-1)=2+3=5$ $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{10}\times\sqrt{30}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{300}}\right)\approx 73^\circ$

إذن، قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين l1,l2 هو $73^\circ$ تقريباً.

---

## إيجاد مساحة المثلث باستعمال المتجهات

أتحقق من فهمي صفحة (149):

أجد مساحة المثلث EFG الذي إحداثيات رؤوسه هي:

$E(2,1,-1), F(5,1,7), G(6,-3,1)$.

$\vec{GF}=\langle -1,4,6\rangle$ $|\vec{GF}|=\sqrt{1+16+36}=\sqrt{53}$ $\vec{GE}=\langle -4,4,-2\rangle$ $|\vec{GE}|=\sqrt{16+16+4}=6$ $\vec{GF}\cdot\vec{GE}=-1(-4)+4(4)+6(-2)=4+16-12=8$

ليكن قياس الزاوية EGF هو θ، إذن:

$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{GF}\cdot\vec{GE}}{|\vec{GF}||\vec{GE}|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{8}{6\sqrt{53}}\right)\approx 79.4^\circ$ $A=\frac{1}{2}|\vec{GF}|\times|\vec{GE}|\sin\theta\approx\frac{1}{2}\times 6\sqrt{53}\sin 79.4^\circ\approx 21.5$

ويمكن إيجاد $\sin\theta$ من معرفتنا بقيمة $\cos\theta$ من دون أيجاد زاوية θ كما يأتي:

$\cos\theta=\frac{4}{3\sqrt{53}}\Rightarrow\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{4}{3\sqrt{53}}\right)^2}=\sqrt{\frac{477-16}{477}}=\sqrt{\frac{461}{477}}\Rightarrow A=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{53}\times\frac{\sqrt{461}}{3\sqrt{53}}=\sqrt{461}\approx 21.5$

---

## مسقط العمود على مستقيم من نقطة خارجه

أتحقق من فهمي صفحة (151):

إذا كانت: $\vec{r}=16\hat{i}+11\hat{j}-3\hat{k}+t(5\hat{i}+7\hat{j}-3\hat{k})$ معادلة متجهة للمستقيم l، والنقطة $P(2,0,103)$ غير واقعة على المستقيم l، فأجيب عن السؤالين الآتيين:

(a) أحدد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l.

اتجاه المستقيم l المعطى هو: $\vec{v}=\langle 5,7,-3\rangle$

افرض أن مسقط النقطة P على l النقطة F، فيكون متجه موقعها هو:

$\vec{OF}=(16+5t)\hat{\imath}+(11+7t)\hat{\jmath}-(3+3t)\hat{k}$

ويكون العمود من P على l هو $\overline{PF}$ حيث:

$\vec{PF}=\vec{OF}-\vec{OP}=(16+5t)\hat{\imath}+(11+7t)\hat{\jmath}-(3+3t)\hat{k}-(2\hat{i}+103\hat{k})\Rightarrow$
$\vec{PF}=(14+5t)\hat{i}+(11+7t)\hat{\jmath}-(193+3t)\hat{k}$

ولأن المتجهين $\vec{PF},\vec{v}$ متعامدان فإن $\vec{PF}\cdot\vec{v}=0$

$5(14+5t)+7(11+7t)-3(-193-3t)=0\Rightarrow t=-2\Rightarrow \vec{OF}=(16+5(-2))\hat{i}+$
$(11+7(-2))\hat{j}-(3+3(-2))\hat{k}=6\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k}$

إذن مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l هو النقطة $F(6,-3,3)$

(b) أجد البعد بين النقطة P والمستقيم l.

$PF=\sqrt{(6-2)^2+(-3-0)^2+(3-103)^2}=\sqrt{2263}$

---

استعمال المتجهات لتحديد قياسات في أشكال ثلاثية الأبعاد

أتحقق من فهمي صفحة (154):

(a) أجد قياس $\angle EDB$ في الهرم المبين في المثال السابق.

$\vec{DE}=\langle 7,8,2\rangle \quad |\vec{DE}|=\sqrt{49+64+4}=\sqrt{117} \quad \vec{DB}=\langle 8,4,-8\rangle \quad |\vec{DB}|=\sqrt{64+16+64}=12 \quad \vec{DE}\cdot\vec{DB}=7(8)+8(4)+2(-8)=72 \quad \theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{DE}\cdot\vec{DB}}{|\vec{DE}||\vec{DB}|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{72}{12\sqrt{117}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{117}}\right)\approx 56.3^\circ$

(b) أجد حجم الهرم.

$AB=\sqrt{8^2+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{72}$

ارتفاع الهرم هو طول العمود المرسوم من الرأس E إلى قاعدته وهو EM،
حيث M هي نقطة منتصف أحد قطري الفاعدة
المربعة: $M=(1+92,1-72,-1+32)=(5,-3,1)$

$EM=(-3)2+(-6)2+(-6)2=9$

حجم الهرم يساوي ثلث مساحة قاعدته في ارتفاعه.

$V=13(72)2(9)=72(3)=216$

إذن، حجم الهرم يساوي 216 وحدة مربعة.